DISCRETE WISKUNDE

DEEL 2

DOOR

A. Hordijk en L.C.M. Kallenberg

Mag. Uitgifte no. 19

INHOUDSOPGAVE Pagina

DEEL I

IV. LINEAIRE PROGRAMMERING EN KORTSTE PADEN IN NETWERKEN

Literatuur

V. Chvatal : "Linear programming", Freeman, 1983.
F.S. Hillier and G.J. Lieberman : "Introduction to Operations Research", Holden-Day, 1986.
K.G. Murty : "Linear programming", Wiley, 1983.

14. Lineaire programmering

Zij $\mathbb{R}^n$ de n-dimensionale Euclidische ruimte. Punten in $\mathbb{R}^n$ noteren we als kolomvectoren. Zij $x \in \mathbb{R}^n$ dan is de getransponeerde vector x^T te schrijven als de rijvector $(x_1,x_2,...,x_n)$.

$C \subset \mathbb{R}^n$ heet <u>convex</u> indien voor alle $x,y \in C$ en alle reële getallen $0 \leq \lambda \leq 1$ geldt dat $\lambda x+(1-\lambda y) \in C$. Meetkundig gesproken, indien twee punten tot C behoren dan ligt ook het lijnsegment dat de punten verbindt in C.

Een <u>extreem</u> punt x van een convexe verzameling C is een punt met de eigenschap: indien $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, $0 < \lambda < 1$, $y,z \in C$, dan geldt:$y = z = x$.

Een <u>hypervlak</u> is de verzameling van punten x die voldoen aan:
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_0$ waarin $a_0,a_1,...,a_n$ gegeven reële getallen zijn.

Een <u>convexe kegel</u> C is een convexe verzameling waarvoor bovendien geldt dat als $x \in C$ dan ook $\lambda x \in C$ voor alle $\lambda \geq 0$.

Het <u>inwendig product</u> van de vectoren $x = (x_1,...,x_n)^T$ en $y = (y_1,...,y_n)^T$ wordt gedefinieerd door:

$$(x,y) := x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

We zullen het inwendig product ook schrijven als x^Ty.

De volgende eigenschappen gelden voor het inwendige product:

$$(x,y) = (y,x)$$

$$(\lambda x,y) = \lambda(x,y) \qquad \lambda \text{ een reëel getal}$$

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$$

De norm $\| x \|$ van een $x \in \mathbb{R}^n$ is gedefinieerd door $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$.
De norm voldoet aan:

$$\| x \| \geq 0$$
$$\| x \| = 0 \text{ d.e.s.d. als } x = 0$$
$$\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \| \quad \text{voor } \lambda \text{ een reëel getal}$$
$$\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

De laatste ongelijkheid heet de <u>driehoeksongelijkheid</u>. Deze ongelijkheid volgt uit de ongelijkheid van Schwartz : $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$.

14.1 STELLING (<u>stelling van het scheidende hypervlak</u>)
Zij C een gesloten convexe verzameling en $x \notin C$. Dan is er een scheidend hypervlak d.w.z. er bestaan getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ z.d.d.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > a_0$$

en

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n < a_0 \qquad \text{voor alle } y \in C.$$

BEWIJS:
Neem $f(y) = \| x-y \|^2$. Het is eenvoudig in te zien dat $f(y)$ een continue functie is. Omdat C gesloten is neemt $f(y)$ op C zijn minimum aan. Zij $z \in C$ z.d.d. $f(z) = \min_{y \in C} f(y)$.
Omdat C convex is geldt voor iedere $y \in C$ en voor iedere $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\| (x-z) - \lambda(y-z) \|^2 = \| x - (\lambda y + (1-\lambda)z) \|^2 \geq \| x-z \|^2.$$

Hieruit volgt

$$-2\lambda(x-z,y-z) + \lambda^2(y-z,y-z) \geq 0, \quad \forall\ y \in C \text{ en } \forall\ \lambda \in [0,1].$$

En dus is

$$(x-z,y-z) \leq 0 \quad \forall\ y \in C.$$

Met $a = x-z \neq 0$, volgt hieruit $(a,y) \leq (a,z)$.
Neem $a_0 = \frac{1}{2}[(x,a) + (z,a)] = \frac{1}{2}[(a,a) + 2(z,a)]$. Daar $(a,a) > 0$ geldt:
$(x,a) = (a,a) + (z,a) > \frac{1}{2}(a,a) + (z,a) = a_0 > (z,a) \geq (y,a),\ \forall\ y \in C.$ ■

14.2 STELLING
Voor $S \subset \mathbb{R}^n$ met $S \neq \emptyset$ is $T := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \leq 0,\ \forall\ x \in S\}$ een gesloten convexe kegel.

BEWIJS:

Indien $y_1,y_2 \in T$ dan $(x,y_1) \leq 0$ en $(x,y_2) \leq 0$, $\forall\ x \in S$. En dus ook:

$$(x,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2) = \lambda(x,y_1)+(1-\lambda)(x,y_2) \leq 0,\ \forall\ \lambda \in (0,1)$$

en

$$(x,\lambda y_1) = \lambda(x,y_1) \leq 0,\ \forall\ \lambda \geq 0.$$

Dus T is een convexe kegel.

Indien $y^k \in T$, $k = 1,2,\dots$ en $\lim_{k\to\infty} y^k = y$, dan geldt:

$$(x,y) = \Sigma_{i=1}^n x_i(\lim_{k\to\infty} y_i^k) = \lim_{k\to\infty} \Sigma_{i=1}^n x_i y_i^k = \lim_{k\to\infty} (x,y^k) \leq 0$$

en dus is T ook gesloten. ∎

Voor een kegel C definiëren we een <u>duale kegel</u> C^* door:

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \leq 0,\ \forall\ x \in C\}.$$

Uit stelling 14.2 volgt dat C^* een gesloten convexe kegel is.

14.3 STELLING

Indien C een gesloten convexe kegel is, dat geldt dat de duale van de duale kegel gelijk is aan C, d.w.z. $(C^*)^* = C$.

BEWIJS:

Volgens de definitie van duale kegel geldt:

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x,y) \leq 0, \forall\ x \in C\}.$$

Uit de symmetrie van het inwendig product geldt voor $x \in C$:

$$(y,x) \leq 0\ \forall\ y \in C^*.$$

Daar $(C^*)^* = \{z \in \mathbb{R}^n \mid (y,z) \leq 0,\ \forall\ y \in C^*\}$, zien we dat $x \in C$ impliceert dat $x \in (C^*)^*$ en dus $C \subset (C^*)^*$.

Via een tegenspraak tonen we aan dat $(C^*)^* \subset C$.Laten we daartoe veronderstellen dat $z \in (C^*)^*$ en $z \notin C$.

Volgens de stelling van het scheidende hypervlak zijn er $a_0,a_1,\dots,a_n$ z.d.d.

(14.4) $\quad a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n > a_0$

en

(14.5) $\quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n < a_0$ voor alle $x \in C$.

Daar de nulvector, notatie 0, een element van C is geldt dat $a_0 > 0$.

Stel er is een $x \in C$ z.d.d. $(a,x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > 0$.

Dan geldt voor λ groot genoeg dat $(a,\lambda x) > a_0$, wat in tegenspraak is met (14.5).

Dus $(a,x) \leq 0 \ \forall\, x \in C \Rightarrow a \in C^*$. Volgens de definitie van $(C^*)^*$ moet hieruit volgen dat $(a,z) \leq 0$. Dit is echter in tegenspraak met (14.5). ∎

In de lineaire programmering gebruiken we convexe veelvlakkenkegels.

Zij $A = (a_{ij})$ een (mxn)-matrix met reële elementen, notatie $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, dan is $C = \{x \mid Ax \leq 0\}$ een <u>convexe veelvlakkenkegel</u>.

Met $Ax \leq 0$ bedoelen we dat iedere component van de m-dimensionale vector Ax kleiner dan of gelijk aan nul moet zijn, d.w.z. $\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq 0$ voor $i = 1,\ldots,m$. De zijvlakken van C zijn de hypervlakken $\{x \in \mathbb{R}^n \mid (a_{i\bullet},x) = 0\}$, $i = 1,\ldots,m$ waarbij $a_{i\bullet} = (a_{i1},\ldots,a_{in})^T$. We zullen deze hypervlakken ook noteren met $a_{i\bullet}^T x = 0$, $i = 1,\ldots,m$.

14.6 STELLING

De convexe kegels $\{x \mid Ax \leq 0\}$ en $\{y \mid y = A^Tu,\ u \geq 0\}$ zijn elkaars duale.

BEWIJS:

Zij $C = \{y \mid y = A^Tu,\ u \geq 0\}$. Volgens stelling (14.3) is het voldoende om aan te tonen dat $C^* = \{x \mid Ax \leq 0\}$. Welnu, per definitie geldt:

$$C^* = \{x \mid (y,x) \leq 0,\ \forall\, y \in C\},$$

waaruit volgt

$$C^* = \{x \mid y^Tx \leq 0,\ \forall\, y = A^Tu \text{ met } u \geq 0\}$$
$$= \{x \mid u^TAx \leq 0,\ \forall\, u \geq 0\} = \{x \mid Ax \leq 0\}.$$ ∎

GEVOLG: $\{y \mid y = A^Tu,\ u \geq 0\} = \{y \mid y^Tx \leq 0 \text{ voor alle } x \text{ met } Ax \leq 0\}$.

Dit resultaat staat bekend als de <u>stelling van Farkas:</u>

14.7 STELLING (Stelling van Farkas)
De vector $p \in \mathbb{R}^n$ maakt een niet-scherpe hoek met iedere vector van een convexe veelvlakkenkegel d.e.s.d. als p behoort tot de duale kegel, d.w.z.

$$\forall x\ (Ax \le 0 \Rightarrow p^T x \le 0) \Longleftrightarrow \exists\, u\ (p = A^T u,\ u \ge 0).$$

Het wiskundige model van de lineaire programmering is het bepalen van het maximum van een lineaire functie over een gebied dat door lineaire ongelijkheden wordt bepaald.

14.8 Voorbeeld.
Op een machine kunnen 2 producten, A en B geheten, gefabriceerd worden uitgaande van 2 grondstoffen, C en D.
Om een eenheid van product A te maken heeft de machine 4 kg van grondstof C, 1 kg van D en een tijdsduur van 2 uur nodig. Een eenheid van product B vereist 2 kg grondstof C, niets van D en de tijdsduur is 3 uur.
De winst per geproduceerde eenheid is *f* 21,- voor product A en *f* 14,- voor product B.
In totaal is 12 kg van grondstof C en 2 kg van grondstof D aanwezig.
Bepaal het meest winstgevende productschema (productieprogramma) gedurende de 12 uur dat de machine ons ter beschikking staat.

Noemen we de te produceren hoeveelheden van de producten A en B resp. x_1 en x_2, dan is het wiskundige model

$$\begin{array}{lrcrl}
\text{maximaliseer} & 21x_1 & + & 14x_2 & \\
\text{onder de voorwaarden} & 4x_1 & + & 2x_2 & \le 12 \\
 & x_1 & & & \le 2 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \le 12 \\
 & x_1 & & & \ge 0 \\
 & & & x_2 & \ge 0
\end{array}$$

Dit is een voorbeeld van een lineaire programmeringsprobleem (LP-probleem). De algemene formulering van een LP-probleem is

$$\begin{array}{llll}
 & \text{maximaliseer} & \sum_{j=1}^n p_j x_j & \\
(14.9) & \text{onder de voorwaarden} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \le b_i & i = 1,2,\dots,m \\
 & & x_j \ge 0 & j = 1,2,\dots,n
\end{array}$$

Omdat $\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ geschreven kan worden als $\Sigma_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j \leq -b_i$ en omdat $\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ als $\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \wedge \Sigma_{j=1}^{n} (-a_{ij})x_j \leq -b_i$, is ieder probleem waarin een lineaire functie moet worden geoptimaliseerd onder een aantal lineaire nevenvoorwaarden in de standaardvorm (14.9) te schrijven. In matrix-schrijfwijze wordt het

$$\max \{p^T x \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\},$$

waarbij $p,x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ en A een reële (m x n)-matrix is.

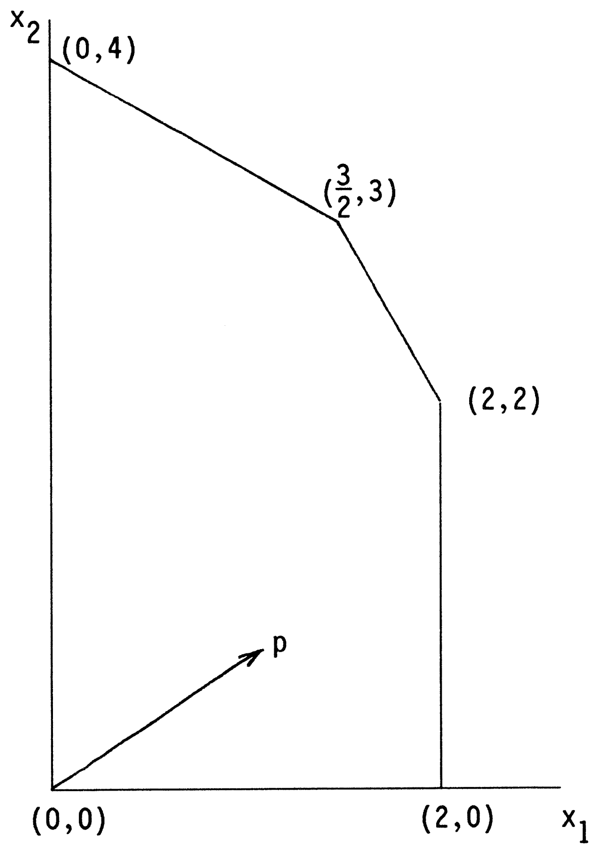
Ieder element van $R = \{x \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\}$ heet een <u>toegelaten oplossing</u> en R zelf heet het <u>toegelaten gebied</u>. De lineaire functie $p^T x$ noemen we de <u>doelfunctie</u>.

Een toegelaten oplossing x^0 heet <u>optimaal</u> als $p^T x^0 \geq p^T x$ voor alle $x \in R$.

De punten van R die niet te schrijven zijn als een echte convexe combinatie van twee verschillende punten van R heten de <u>extreme punten</u> of <u>hoekpunten</u> van R.

Een vector $s \in \mathbb{R}^n$ heet een <u>toegelaten richting</u> in $x^o \in R$ als er een $\lambda > 0$ bestaat z.d.d. $x^o + \lambda s \in R$; een toegelaten richting heet <u>bruikbaar</u> als $p^T s > 0$.

<u>Voorbeeld</u>. Het lineaire programmeringsprobleem uit voorbeeld 14.8 is hieronder getekend.



De hoekpunten van dit probleem zijn: (0,0), (2,0), (2,2), $(\frac{3}{2},3)$ en (0,4). Er is ook een hoekpunt dat een optimaal punt is, nl. $(\frac{3}{2},3)$.

14.10 STELLING

$x^0 \in R$ is een optimale oplossing d.e.s.d. als er in x^0 geen bruikbare richting is.

BEWIJS:

$\Rightarrow$ Zeg s is een bruikbare richting in x^0 en $x^0 + \lambda s \in R$ met $\lambda > 0$.

Uit $p^T(x^0+\lambda s) = p^Tx^0 + \lambda p^Ts > p^Tx^0$ volgt dan dat x^0 niet optimaal is.

$\Leftarrow$ Stel $x^0 \in R$ is niet optimaal. Dan is er een $x^1 \in R$ met $p^Tx^1 > p^Tx^0$.

Zij $s = x^1 - x^0$, dan is s een bruikbare richting in x^0. ■

Zij e^j de j-de eenheidsvector, d.w.z. $e^j_k := \begin{cases} 1 \text{ als } k = j \\ 0 \text{ als } k \neq j \end{cases}$.

Voor een toegelaten oplossing x definiëren we de volgende verzamelingen:

$$M(x) := \{i \mid a_{i.}^T x = b_i\} \; ; \; N(x) := \{j \mid x_j = 0\} = \{j \mid (e^j)^T x = 0\};$$

$$S(x) := \left\{ s \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{i.}^T s \leq 0 \;,\; i \in M(x) \\ (-e^j)^T s \leq 0 \;,\; j \in N(x) \end{array} \right\} .$$

$S(x)$ heet de (convexe veelvlakken) <u>kegel van toegelaten richtingen</u> in x.

14.11 STELLING

$x \in R$ is optimaal d.e.s.d. indien er $u \in \mathbb{R}^m$ en $v \in \mathbb{R}^n$ bestaan z.d.d.

(14.12) $u \geq 0,\; v \geq 0;$

(14.13) $p = A^Tu - v;$

(14.14) $v^Tx = 0$ en $u^T(b - Ax) = 0$.

BEWIJS:

$x \in R$ is optimaal $\Leftrightarrow p^Ts \leq 0 \;\forall\, s \in S(x) \Leftrightarrow p \in (S(x))^* \Leftrightarrow$

$p = \sum_{i \in M(x)} u_i a_{i.} + \sum_{j \in N(x)} v_j(-e^j);\; u_i \geq 0,\; i \in M(x);\; v_j \geq 0,\; j \in N(x)$.

$\Rightarrow$ Definiëren we $u_i = 0,\; i \notin M(x)$ en $v_j = 0,\; j \notin N(x)$, dan gelden de relaties (14.12), (14.13) en (14.14).

$\Leftarrow$ Als de relaties (14.12), (14.13) en (14.14) gelden, dan is $u_i = 0,\; i \notin M(x)$ en $v_j = 0, j \notin N(x)$. Uit $p = A^Tu - v$ volgt dan $p = \sum_{i \in M(x)} u_i a_{i.} + \sum_{j \in N(x)} v_j(-e^j)$, wat impliceert dat x optimaal is. ■

De relaties (14.12), (14.13) en (14.14) heten de <u>optimaliteitsvoorwaarden.</u>

Voor een LP-probleem zijn er drie mogelijkheden:

1. R is een lege verzameling; het LP-probleem heet <u>ontoelaatbaar;</u>
2. Er is een (eindige) optimale oplossing x^o; het LP-probleem heet <u>eindig</u>;
3. Er is een $x \in R$ en een $s \in \mathbb{R}^n$ z.d.d. $p^T s > 0$ en $x + \lambda s \in R \quad \forall \lambda \geq 0$: het LP-probleem heet <u>oneindig</u>.

Door voor iedere $x \in R$ een vector $y(x) \in \mathbb{R}^m$ te definiëren met $y(x) = b - Ax$ is er een equivalente formulering van het LP-probleem (we noteren y i.p.v. y(x)):

(14.15) $\qquad \max \{p^T x \mid Ax + y = b;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}$.

De variabelen $y_i = b_i - \Sigma_{j=1}^n a_{ij} x_j$ heten de <u>verschilvariabelen.</u>

Door te noteren:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},\ \bar{p} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \text{ en } \bar{A} = (A, I),$$

met I de (m x m)-eenheidsmatrix wordt een andere schrijfwijze verkregen:

(14.16) $\qquad \max \{\bar{p}^T \bar{x} \mid \bar{A}\bar{x} = b;\ \bar{x} \geq 0\}$.

Zij $\bar{R} := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \bar{A}\bar{x} = b;\ \bar{x} \geq 0\}$, en $\bar{a}_{\bullet k}$, $k = 1,2,\ldots,n+m$ de kolomvectoren van de matrix $\bar{A}$. Verder definiëren we $J(\bar{x}) := \{j \mid \bar{x}_j > 0\}$.

14.17 STELLING

Laat $\bar{x} \in \bar{R}$. Dan geldt: $\bar{x}$ is een hoekpunt d.e.s.d. als $\{\bar{a}_{\bullet k} \mid k \in J(\bar{x})\}$ een verzameling van lineair onafhankelijke vectoren is.

BEWIJS:

Voor $\bar{x} = 0$ is de stelling triviaal. Stel nu $J(\bar{x}) = \{1,2,\ldots,r\}$.

$\Rightarrow$ Veronderstel dat $\{\bar{a}_{\bullet k} \mid 1 \leq k \leq r\}$ lineair afhankelijk zijn. Dan bestaat er een $d \neq 0$ met $d = (d_1, d_2, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)^T$ z.d.d. $\bar{A}d = 0$.

Door λ voldoende klein, maar wel positief, te kiezen kunnen we ervoor zorgen dat $\bar{x} + \lambda d \geq 0$ en $\bar{x} - d \geq 0$.

Daar $\bar{x} + \lambda d \in \bar{R}$, $\bar{x} - \lambda d \in \bar{R}$ en $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + \lambda d) + \frac{1}{2}(\bar{x} - \lambda d)$ volgt nu dat $\bar{x}$ geen hoekpunt is.

$\Leftarrow$ Veronderstel dat $\bar{x} = \lambda \bar{x}^1 + (1-\lambda)\bar{x}^2$ en $\bar{x}^1, \bar{x}^2 \in \bar{R}$ en $0 \leq \lambda \leq 1$.

Omdat $\bar{x}_j = 0$, $j > r$, is ook $\bar{x}_j^1 = \bar{x}_j^2 = 0$ voor alle $j > r$. Er geldt nu

$0 = \bar{A}(\bar{x}^1 - \bar{x}^2) = \Sigma_{j=1}^n \bar{a}_{\bullet j}(\bar{x}_j^1 - \bar{x}_j^2)$, dus $\{\bar{a}_{\bullet j}$, $j = 1,2,\ldots,r\}$ zijn lineair afhankelijk. ∎

GEVOLG:
Omdat uit de kolommen van $\bar{A}$ slechts eindig veel lineair onafhankelijke deelverzamelingen zijn te kiezen heeft $\bar{R}$ een eindig aantal hoekpunten.

14.18 STELLING
Als $\bar{R} \neq \emptyset$, dan heeft $\bar{R}$ minstens één hoekpunt.
BEWIJS:

Zij $j(\bar{x}) = |J(\bar{x})|$ en $r = \min_{\bar{x}\in\bar{R}} j(\bar{x})$. Veronderstel dat $r = j(\bar{x})$ met $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,0,\ldots,0)$. We zullen aantonen dat $\bar{x}$ een hoekpunt is. Neem aan dat $\bar{x}$ geen hoekpunt is. Dan is $\{\bar{a}_{\bullet j} | j = 1,2,\ldots,r\}$ volgens (14.17) lineair afhankelijk. Er is dus een $d \neq 0$ met $d = (d_1,d_2,\ldots,d_r,0,\ldots,0)^T$ z.d.d. $\bar{A}d = 0$. Laat $\bar{x}(\lambda) = \bar{x} + \lambda d$, dan is $\bar{A}\bar{x}(\lambda) = b$ voor alle waarden van λ. Er is nu echter een λ_0 z.d.d. $\bar{x}(\lambda_0) \geq 0$ en $j(\bar{x}(\lambda_0)) < r$, wat een tegenspraak oplevert. $\bar{x}$ is dus inderdaad een hoekpunt. ■

14.19 STELLING
Als $\bar{R} \neq \emptyset$ en begrensd, dan geldt:
(i) Iedere $\bar{x} \in \bar{R}$ is een convexe combinatie van de hoekpunten van $\bar{R}$.
(ii) Er is een hoekpunt van $\bar{R}$ dat een optimale oplossing van (14.9) is.
BEWIJS:

(i) Neem een $\bar{x}^0 \in \bar{R}$. Als $j(\bar{x}^0) = \min_{\bar{x}\in\bar{R}} j(\bar{x})$, dan is $\bar{x}^0$ volgens het bewijs van stelling (14.18) een hoekpunt.

We passen nu volledige inductie naar $j(\bar{x}^0)$ toe. Noteer (ter afkorting) $j = j(\bar{x}^0)$, en laat $\bar{x}^0 = (\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0,\ldots, \bar{x}_j^0, 0,\ldots, 0)^T$.

Als $\{\bar{a}_{\bullet k}| k = 1,2,\ldots,j\}$ lineair onafhankelijk zijn, dan is $\bar{x}$ zelf een hoekpunt. Als $\{\bar{a}_{\bullet k}| k = 1,2,\ldots,j\}$ lineair afhankelijk zijn, dan is er een $d \neq 0$ met $d = (d_1,d_2,\ldots,d_j,0,\ldots,0)^T$ z.d.d. $\bar{A}d = 0$.

Beschouw $x(\lambda) = \bar{x}^0 + \lambda d$. Omdat $\bar{R}$ begrensd is bestaan er (eindige) getallen $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 < 0$ z.d.d. $\lambda_1 = \max \{\lambda|\bar{x}(\lambda) \geq 0\}$ en $\lambda_2 = \min \{\lambda \mid \bar{x}(\lambda) \geq 0\}$.

$\bar{x}(\lambda_1)$ en $\bar{x}(\lambda_2)$ behoren tot $\bar{R}$ en $j(\bar{x}(\lambda_1)) \leq j-1$ en $j(\bar{x}(\lambda_2)) \leq j-1$.

Volgens de inductieveronderstelling zijn dus $\bar{x}(\lambda_1)$ en $\bar{x}(\lambda_2)$ te schrijven als een convexe combinatie van de hoekpunten van $\bar{R}$. Omdat $\bar{x}$ een convexe combinatie is van $\bar{x}(\lambda_1)$ en $\bar{x}(\lambda_2)$, nl. $\bar{x} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\{\lambda_2\bar{x}(\lambda_1) - \lambda_1\bar{x}(\lambda_2)\}$, is ook $\bar{x}$ een convexe combinatie van de hoekpunten van $\bar{R}$.

(ii) Laat $\{\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^k\}$ de verzameling van hoekpunten van $\bar{R}$ zijn en veronderstel $\bar{p}^T\bar{x}^1 \geq \bar{p}^T\bar{x}^2 \geq \cdots \geq \bar{p}^T\bar{x}^k$. Zij $\bar{x}$ een optimale oplossing van het LP-probleem en laat $\bar{x} = \Sigma_{j=1}^k \lambda_j\bar{x}^j$ met $\lambda_j \geq 0$ $\forall j$ en $\Sigma_j \lambda_j = 1$. Dan geldt: $\bar{p}^T\bar{x} = \Sigma_{j=1}^k \lambda_j\bar{p}^T\bar{x}^j \leq \bar{p}^T\bar{x}^1$, dus $\bar{x}^1$ is ook een optimale oplossing. ■

14.20 STELLING

Als $\bar{R} \neq \emptyset$ en onbegrensd is en als er een optimale oplossing $\bar{x}^0$ bestaat is er een hoekpunt $\bar{x}^1$ van $\bar{R}$ dat ook een optimale oplossing is.

BEWIJS:

Laat $\{\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots,\bar{x}^k\}$ de verzameling van hoekpunten van $\bar{R}$ zijn.

Zij $c = \max_{0\leq k\leq K} \Sigma_{j=1}^{n+m} \bar{x}_j^k$ en beschouw het LP-probleem

(14.21) $\max\{\bar{p}^T\bar{x} \mid \bar{A}\,\bar{x} = b;\ e^T\bar{x} \leq c+1;\ x \geq 0\}$, waarbij $e = (1,1,\dots,1)^T$, met toegelaten gebied $\tilde{R}$.

Het is eenvoudig in te zien dat de volgende twee eigenschappen gelden:

(i) $\{\bar{x}^1,\bar{x}^2,\dots\bar{x}^K\}$ zijn weer hoekpunten van $\tilde{R}$ en voor de overige hoekpunten van $\tilde{R}$, zeg $\bar{x}^{K+1},\bar{x}^{K+2},\dots,\bar{x}^{K+L}$, geldt: $e^T\bar{x}^{K+j} = c+1$, $j = 1,2,\dots,L$.

(ii) $\bar{x}^0$ is een optimale oplossing van (14.21).

Omdat $\tilde{R}$ begrensd is volgt uit (14.19) dat $\bar{x}^0 = \Sigma_{k=1}^{K+L} \lambda_k\bar{x}^k$ met $\lambda_k \geq 0$ en $\Sigma_k \lambda_k = 1$. Uit de optimaliteit van $\bar{x}^0$ volgt dat $\bar{x}^k$ ook een optimale oplossing is als $\lambda_k > 0$. Veronderstel nu dat $\lambda_k = 0$ voor $k = 1,2,\dots,K$. Dan geldt: $e^T\bar{x}^0 = \Sigma_{k=K+1}^{K+L} \lambda_k \Sigma_j \bar{x}_j^k = c+1$. Dit is in tegenspraak met de definitie van c. Er is dus een $1 \leq k \leq K$ met $\lambda_k > 0$, waaruit volgt dat $\bar{x}^k$ een optimale oplossing is. ■

Bij ieder lineair programmeringsprobleem behoort een <u>duaal probleem</u>. Het duale probleem van (14.9) is:

(14.22) $\min\{b^Tu \mid A^Tu \geq p;\ u \geq 0\}$.

We noteren het toegelaten gebied van (14.22) met R^1.

Door de verschilvariabelen $v_j = \Sigma_{i=1}^m a_{ij}u_i - p_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, in te voeren krijgen we de equivalente formulering

(14.23) $\qquad \min \{b^Tu \mid A^Tu - v = p;\ u \geq 0;\ v \geq 0\}$

We noemen (14.9) het primale probleem (P) en (14.22) het duale probleem (D). Bij gegeven $x \in R$ noemen we een $u \in \mathbb{R}^m$ z.d.d. $x_jv_j = u_iy_i = 0$ voor alle i,j, waarbij $v = A^Tu - p$ en $y = b - Ax$, een met x corresponderende vector van duale variabelen.

Voorbeeld. Het duale probleem van probleem (14.9) is:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{minimaliseer} & 12u_1 & + & 2u_2 & + & 12u_3 & & \\
\text{onder de voorwaarden} & 4u_1 & + & u_2 & + & 2u_3 & \geq & 21 \\
 & 2u_1 & & & + & 3u_3 & \geq & 14 \\
 & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Zij $x = (2,0)$, dan is $u = (0,21,0)$ een met x corresponderende vector van duale variabelen.

14.24 STELLING

Het duale van het duale lineaire programmeringsprobleem is het oorspronkelijke probleem.

BEWIJS:

(14.22) kan geschreven worden als

(14.25) $\qquad -\max \{(-b)^Tu \mid (-A^T)u \leq (-p);\ u \geq 0\}.$

Het duale probleem van (14.25) is

(14.26) $\qquad -\min \{(-p)^Tx \mid -Ax \geq -b; x \geq 0\}.$

(14.26) kan herschreven worden tot

$$\max \{p^Tx \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\}. \qquad \blacksquare$$

Er zijn verbanden tussen een lineair programmeringsprobleem en het duale probleem. We zullen in de volgende stellingen de zwakke resp. de sterke dualiteitsstelling geven.

14.27 STELLING (*Zwakke dualiteit*)
Indien x toegelaten is voor het primale probleem en u is toegelaten voor het duale probleem, dan geldt $p^Tx \le b^Tu$.

BEWIJS:
Zij y resp. v de bij x resp. u behorende vector van verschilvariabelen. We kunnen nu schrijven:

$$p^Tx = (A^Tu - v)^Tx = (u^TA - v^T)x = u^TAx - v^Tx = u^Tb - u^Ty - v^Tx.$$

Daar $x \ge 0$, $y \ge 0$, $u \ge 0$ en $v \ge 0$ geldt:

$$p^Tx = u^Tb - u^Ty - v^Tx \le b^Tu \ . \tag{14.28}$$

■

Stelling (14.27) zegt dat de waarde van de primale doelfunctie op R overal kleiner dan of gelijk is aan de waarde van duale doelfunctie in ieder punt van R^1. Hieruit volgt onmiddellijk dat voor $x \in R$ en $u \in R^1$ met $p^Tx = b^Tu$ moet gelden dat x optimaal is voor het primale probleem en u optimaal is voor het duale probleem.

14.29 STELLING (*sterke dualiteit*)
Als (14.9) een eindige optimale oplossing, zeg x^0, heeft, dan heeft (14.22) ook een eindige optimale oplossing, zeg u^0, en er geldt:
$p^Tx^0 = b^Tu^0$.

BEWIJS:
Zij $y = b - Ax^0$. Volgens stelling (14.11) zijn er $u^0 \in \mathbb{R}^m$ en $v \in \mathbb{R}^n$ z.d.d. $u^0 \ge 0$, $v \ge 0$, $p = A^Tu^0 - v$, $v^Tx^0 = 0$ en $(u^0)^Ty = 0$. Met relatie (14.28) volgt dan $p^Tx^0 = b^Tu^0$ en dus u^0 is een optimale oplossing voor het duale probleem. ■

Andere belangrijke relaties tussen het primale en duale probleem geven we in de volgende stelling.

14.30 STELLING
(i) Als (P) oneindig is, dan is (D) ontoelaatbaar.
(ii) Als (P) ontoelaatbaar is, dan is (D) òf ontoelaatbaar òf oneindig.
(iii) Als $x \in R$, $u \in R^1$ en $u^T(b - Ax) = x^T(p - A^Tu) = 0$, dan is x optimaal voor (P) en u optimaal voor (D).

BEWIJS:

(i) Dit is een gevolg van stelling (14.27).

(ii) Stel (14.22) heeft een eindige oplossing, dan volgt uit stelling (14.29) dat het duale probleem van (14.22) ook een eindige oplossing heeft. Dit duale probleem is volgens stelling (14.24) het probleem (14.9). Dit geeft een tegenspraak met het gegeven.

(iii) Dit is een gevolg van stelling (14.27). ∎

Indien naast ongelijkheden ook gelijkheden voorkomen in een LP-probleem dan kan het duale probleem opgesteld worden door iedere gelijkheid te vervangen door 2 ongelijkheden en te dualiseren. Bij iedere gelijkheid behoren op deze manier 2 duale variabelen waarvan de coëfficiënten tegengesteld zijn zowel in de doelfunctie als in de beperkingen. Door nu over te gaan op een nieuwe variabele die het verschil is van deze 2 variabelen krijgen we een eenvoudige schrijfwijze van het duale probleem. In deze schrijfwijze correspondeert iedere gelijkheid dus met één duale variabele. Deze duale variabele is in feite het verschil van 2 niet-negatieve variabelen en kan dus zowel positief als negatief zijn.

<u>14.31 Voorbeeld</u>. Beschouw het LP-probleem

$$\max\left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 \le 4; & x_1 \ge 0 \\ -x_2 + x_3 \le -1; & x_2 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6; & x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

Door de gelijkheid $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$ te vervangen door

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le -6 \end{cases}$$

èn te dualiseren krijgen we als duaal probleem:

$$\min\left\{ 4u_1 - u_2 + 6u_3 - 6u_4 \;\middle|\; \begin{array}{rl} u_1 + u_3 - u_4 \ge 1; & u_1 \ge 0 \\ -u_2 + 2u_3 - 2u_4 \ge 1; & u_2 \ge 0 \\ u_1 + u_2 - 3u_3 + 3u_4 \ge 1; & u_3, u_4 \ge 0 \end{array} \right\}$$

Neem $u_3^* = u_3 - u_4$, dan wordt de formulering

$$\min\left\{ 4u_1 - u_2 + 6u_3^* \;\middle|\; \begin{array}{rl} u_1 + u_3^* \ge 1; & u_1 \ge 0 \\ -u_2 + 2u_3^* \ge 1; & u_2 \ge 0 \\ u_1 + u_2 - 3u_3^* \ge 1 & \end{array} \right\}$$

We kunnen natuurlijk ook u_3 i.p.v. u_3^* schrijven.

Omgekeerd, als in het LP-probleem een variabele voorkomt die zowel positief als negatief mag zijn (een dergelijke variabele heet een vrije variabele), dan is de corresponderende vergelijking in het duale probleem een gelijkheid. Ga dit zelf na.

Aan de duale variabelen kan een economische interpretatie gegeven worden. We zullen dit doen met het probleem van de allocatie van schaarse productiemiddelen. Gegeven zijn n verschillende producten met verkoopprijzen p_j, $j = 1,\dots,n$. Om een eenheid van het product j te produceren is een hoeveelheid a_{ij} van productiemiddel i nodig. De totale hoeveelheid productiemiddel i is b_i, $i = 1,\dots,m$.

Probeer nu een productiepakket samen te stellen met maximaal profijt. Een productiepakket bestaat uit variabelen x_j, $j = 1,\dots,n$; x_j is de geproduceerde hoeveelheid van product j. Wil dit productiepakket uitgevoerd kunnen worden dan moet er voldoende van productiemiddel i aanwezig zijn:

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_j \qquad , i = 1,\dots,m .$$

Het pakket met maximaal profijt vinden we als optimale oplossing van

$$\max \ \{ \Sigma_{j=1}^{n} p_j x_j \mid \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ , \ 1 \le i \le m, \ x_j \ge 0, \ 1 \le j \le n\} \ .$$

Het duale probleem is

$$\min \ \{ \Sigma_{i=1}^{m} b_i u_i \mid \Sigma_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \ge p_j \ , \ 1 \le j \le n, \ u_i \ge 0, \ 1 \le i \le m\} \ .$$

Dit is het probleem van de concurrent die ons uit wil kopen.

Laten we veronderstellen dat de concurrent prijzen $u_i \ge 0$, $i = 1,\dots,m$ voor onze productiemiddelen wil betalen. Bij deze prijzen zal de economische waarde per eenheid van product j gelijk zijn aan $\Sigma_{i=1}^{m} u_i a_{ij}$.
Willen we op het aanbod van de concurrent ingaan, dan zal moeten gelden: $\Sigma_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \ge p_j$ anders is het voordeliger voor ons productieactiviteit j te gebruiken .
Binnen de beperkingen zal de concurrent het te betalen bedrag zo klein mogelijk willen maken dus zal hij $\Sigma_{i=1}^{m} b_i u_i$ willen minimaliseren. De sterke dualiteitsstelling zegt nu dat in een situatie van economisch evenwicht het er niet toe doet of de productiemiddelen gebruikt dan wel verkocht worden.

Indien voor een optimaal productieprogramma x^0 geldt dat $\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 < b_i$, dan is er een overschot van productiemiddel i zodat dit middel geen economische waarde heeft (immers als y^0 resp. u^0 resp. v^0 de met x^0 corresponderende verschilvector resp. duale vector resp. duale verschilvector is dan geldt: $y_i^0 > 0 \Rightarrow u_i^0 = 0$. Indien $\Sigma_{i=1}^m u_i^0 a_{ij} > p_j$ dan is het profijt van productie-activiteit j minder dan de economische waarde: een optimaal productiepakket zal activiteit j niet gebruiken. Inderdaad $v_j^0 > 0 \Rightarrow x_j^0 = 0$.

Voor w de waarde van een optimaal productiepakket volgt uit de sterke dualiteitsstelling dat $w = \Sigma_{i=1}^m b_i u_i^0$. Er geldt dus:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial b_i}\right)_{u_i=u_i^0} = u_i^0.$$

Dit betekent dat de marginale kosten van productiemiddel i in het optimum gelijk zijn aan de duale variabel u_i^0. De duale variabelen u_i^0, $i = 1,\dots,m$ worden dan ook wel de <u>marginale kosten</u> of <u>schaduwprijzen</u> genoemd.

Opgave 1

Een veevoederfabrikant moet een product samenstellen met onderstaande ingrediënten en zodanig dat aan de vermelde specificaties wordt voldaan.

Ingredient	Specificatie
Appelschillen	minstens 13%
Vitamines	minstens 2% en hoogstens 3%
Suiker	minstens 8%
Eiwitten	hoogstens 4%
Haver	het overblijvende deel

De fabrikant beschikt over 5 mengsels waarvan de samenstelling en de kosten als volgt zijn:

mengsel	appelschillen	vitamines	suiker	eiwitten	haver	kosten per kg
1	60%	5%	30%	5%	--	18
2	80%	10%	--	10%	--	15
3	--	20%	70%	10%	--	10
4	100%	--	--	--	--	20
5	--	--	--	--	100%	5

Het doel van de fabrikant is om uit deze 5 mengsels zo goedkoop mogelijk een produkt te fabriceren dat aan de specificaties voldoet.
Formuleer dit als een lineair programmeringsprobleem.

Opgave 2

Een bedrijf dat meubelplaten produceert heeft in 2 plaatsen fabriken staan. In de eerste fabriek, waar op 80% van de maximale capaciteit wordt gedraaid, wordt per maand 2800 ton geproduceerd, met kosten ƒ500,- per ton. Voor 100 ton meubelplaat is 80 ton grondstof nodig. Tot 1500 ton kan deze in de buurt worden ingekocht voor ƒ100,- per ton, het restant wordt elders gekocht voor ƒ150,- per ton.

In de tweede fabriek wordt op 60% van de maximale capaciteit gewerkt met een produktie van 3600 ton per maand. De produktiekosten zijn hier ƒ600,- per ton. Per maand kan 4000 ton grondstof voor ƒ125,- per ton worden gekocht, en voor het meerdere moet ƒ150,- worden betaald. Per maand moet het bedrijf 6300 ton produceren. Formuleer het probleem "hoeveel moet in iedere fabriek geproduceerd worden om de totale kosten te minimaliseren" als een lineair programmeringsprobleem.

Opgave 3

Een gokker kan op 4 manieren geld inzetten. Hij heeft ƒ500,-. Het spel heeft 3 mogelijke uitkomsten, en de volgende tabel geeft per ingezette gulden de winst of het verlies voor ieder van de mogelijkheden.

	keuze van de inzet			
uitkomst spel	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	8

De speler wil zijn ƒ500,- zó verdelen over de vier mogelijkheden dat het bedrag dat hij minstens "ontvangt" (dit kan ook negatief zijn) maximaal is. Formuleer dit probleem als LP-probleem.

Opgave 4

Schrijf het volgende probleem in de standaardgedaante (14.9):

$$\min \left\{ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 \geq -5 & ;\ x_1 \geq 0 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 & ;\ x_2 \geq 0 \\ 19x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 13 & ;\ x_3 \text{ vrij} \end{array} \right\}$$

Opgave 5

Bewijs dat de verzameling van optimale oplossing van een lineair programmeringsprobleem convex is.

Opgave 6

a. Stel het duale probleem op van

$$\max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \le 4 \;;\; x_2 \ge 0 \\ \qquad\; x_2 - x_3 \le 1 \;;\; x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

b. Stel het duale probleem op van:

$$\max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \le 4 \;;\; x_2 \ge 0 \\ \qquad\; x_2 - x_3 \le 1 \;;\; x_3 \text{ vrij} \end{array} \right\}$$

Opgave 7

Als $\max \{p^T x \mid Ax \le b;\ x \ge 0\}$ een oneindige oplossing heeft, dan heeft $\max \{p^T x \mid Ax \le c\ ;\ c \ge 0\}$ voor geen enkele c een eindige optimale oplossing. Bewijs dit.

Opgave 8

Beschouw het lineaire programmeringsprobleem $\max \{p^T x \mid Ax \le b;\ x \ge 0\}$.
Bewijs dat het vinden van een optimale oplossing van dit probleem equivalent is aan het vinden van een toelaatbare oplossing van het stelsel ongelijkheden $Bz \ge d$ met

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ 0 & I \\ -A & 0 \\ I & 0 \\ p^T & -b^T \end{bmatrix} \text{ en } d = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 9

a. Geef een voorbeeld van een ontoelaatbaar LP-probleem met een duaal probleem dat ook ontoelaatbaar is.

b. Geef een voorbeeld van een ontoelaatbaar LP-probleem met een duaal probleem dat oneindig is.

Opgave 10

Beschouw een LP-probleem in de gedaante (14.9), en zij u^* een optimale oplossing van het bijbehorende duale probleem.
Veronderstel dat b in het LP-probleem wordt vervangen door een vector c, en laat x^* de oplossing van dit nieuwe LP-probleem zijn.
Toon aan dat $\Sigma_{j=1}^{n} p_j x_j^* \le \Sigma_{i=1}^{m} c_i u_i^*$.

Opgave 11

Voor LP-problemen met k vrije variabelen geeft de substitutie $x_j = x_j^+ - x_j^-$ met $x_j^+, x_j^- \ge 0$ een equivalente formulering met k extra variabelen.
Toon aan dat het ook mogelijk is om een equivalente formulering, waarin alle variabelen niet-negatief zijn, te verkrijgen met slechts één extra niet-negatieve variabele.

15. De Simplex methode

De simplex methode is een klasse van algorithmen om LP-problemen op te lossen. We zullen van de simplex methode zowel de algebraïsche als de meetkundige aspecten bespreken. Beschouw het LP-probleem in de gedaante (14.15) d.w.z.

$$\max \{p^T x \mid Ax + y = b \; ; \; x \geq 0, \; y \geq 0\},$$

waarbij we aannemen dat $b \geq 0$.

Als $p \leq 0$, dan is het maximum altijd niet-positief. Dus $x = 0$, $y = b$ is een optimale oplossing. Omdat de kolommen behorende bij positieve variabelen een deelmatrix van de eenheidsmatrix vormen, en dus lineair onafhankelijk zijn, is deze oplossing volgens stelling 14.17 een hoekpunt.

Als niet geldt dat $p \leq 0$, dan gaan we een andere schrijfwijze voor het stelsel $Ax + y = b$ opstellen, totdat we in een situatie terecht komen waarin een optimale oplossing direct zichtbaar is. De schrijfwijze die we gebruiken zal blijken te corresponderen met een hoekpunt. Aldus vinden we een optimaal hoekpunt. We zullen deze methode verderop precies uitwerken, voor dit moment volstaan we met een voorbeeld.

Voorbeeld. Beschouw voorbeeld 14.8. Met de verschilvariabelen y_1, y_2 en y_3 is het LP-probleem te schrijven als:

$$\begin{array}{lrcll}
\max & x_0 & = & 0 + 21x_1 + 14x_2 & \\
\text{onder:} & y_1 & = & 12 - 4x_1 - 2x_2 & (a) \\
& y_2 & = & 2 - x_1 & (b) \\
& y_3 & = & 12 - 2x_1 - 3x_2 & (c) \\
& & & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 &
\end{array}$$

Een toegelaten oplossing is: $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = 12$, $y_2 = 2$ en $y_3 = 12$. Optimaal is deze oplossing echter niet: door x_1 positief te maken wordt een betere oplossing verkregen. x_1 kan echter niet groter worden dan 2, zonder dat een der variabelen (in dit geval y_2) negatief wordt.
Uit (b) volgt dat $x_1 = 2 - y_2$. Substitueren we dit, dan krijgen we de schrijfwijze:

$$\begin{array}{lrcll}
\max & x_0 & = & 42 - 21y_2 + 14x_2 & \\
\text{onder:} & y_1 & = & 4 + 4y_2 - 2x_2 & (a) \\
& x_1 & = & 2 - y_2 & (b) \\
& y_3 & = & 8 + 2y_2 - 3x_2 & (c) \\
& & & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0. &
\end{array}$$

Deze schrijfwijze correspondeert met de oplossing: $y_2 = x_2 = 0$, $y_1 = 4$, $x_1 = 2$ en $y_3 = 8$. Een betere oplossing wordt vervolgens verkregen door x_2 positief te maken. Dit kan totdat y_1 nul wordt.

Uit (a) volgt dat $x_2 = \frac{1}{2}(4 + 4y_2 - y_1)$. Substitutie hiervan geeft:

$$
\begin{array}{llll}
\max & x_0 = 70 + 7y_2 - 7y_1 & \\
\text{onder:} & x_2 = 2 + 2y_2 - \frac{1}{2}y_1 & \text{(a)} \\
 & x_1 = 2 - y_2 & \text{(b)} \\
 & y_3 = 2 - 4y_2 + \frac{3}{2}y_1 & \text{(c)} \\
 & \quad x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0. &
\end{array}
$$

De oplossing $y_2 = y_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1 = 2$ en $y_3 = 2$ is ook niet optimaal. Door y_2 positief te maken kan de doelfunctie nog stijgen. y_2 kan stijgen totdat y_3 0 wordt.

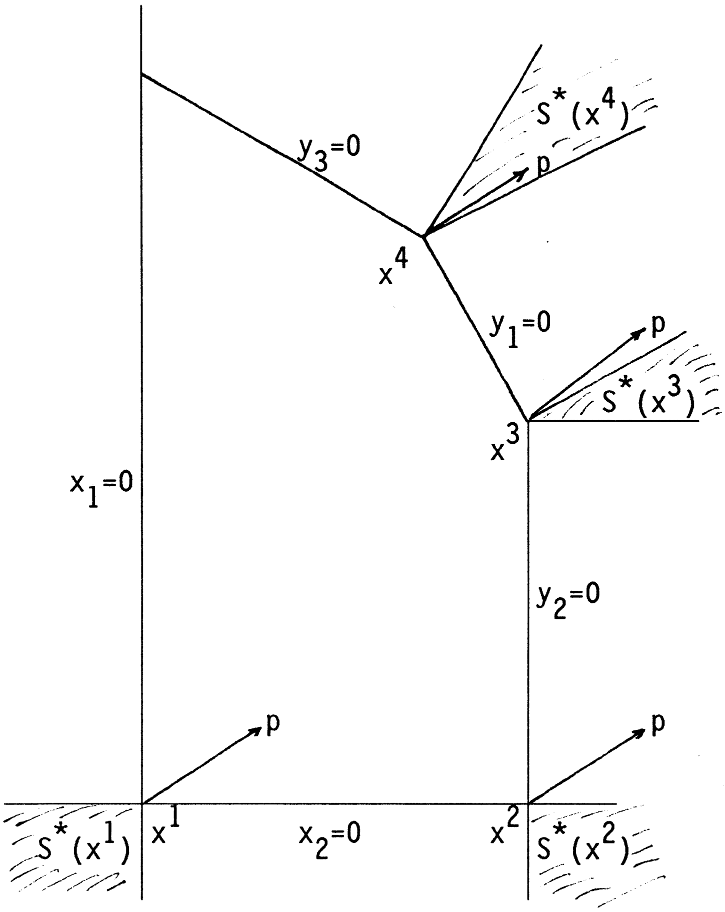
Vergelijking (c) geeft $y_2 = \frac{1}{4}(2 + \frac{3}{2}y_1 - y_3)$, en substitutie levert op:

$$
\begin{array}{llll}
\max & x_0 = 73\frac{1}{2} - \frac{7}{4}y_3 - \frac{35}{8}y_1 & \\
\text{onder:} & x_2 = 3 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{4}y_1 & \text{(a)} \\
 & x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}y_3 - \frac{3}{8}y_1 & \text{(b)} \\
 & y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y_3 + \frac{3}{8}y_1 & \text{(c)} \\
 & \quad x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0. &
\end{array}
$$

Uit deze schrijfwijze volgt dat $y_3 = y_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ een optimale oplossing is. Omdat de kolommen bij de positieve variabelen lineair onafhankelijk zijn, is het een optimaal hoekpunt.

Meetkundig gezien, gaan we van hoekpunt naar hoekpunt totdat een optimaal hoekpunt wordt gevonden. Volgens stelling 14.11 is x optimaal d.e.s.d. als $p = A^Tu - v$ met $u,v \geq 0$ en $v^T(b - Ax) = 0$, d.w.z. als p ligt in de duale kegel van de kegel toegelaten richtingen in x. We nemen daartoe $v_j = 0$ voor $j \notin N(x)$ en $u_i = 0$ voor $i \notin M(x)$.
Vervolgens bepalen we de oplossing van het stelsel $p = A^Tu - v$.
De variabelen v_j, $j \in N(x)$ en u_i, $i \in M(x)$ heten de <u>actieve</u> duale variabelen.
Indien $u,v \geq 0$, dan is x een optimale oplossing. De variabelen x_j, $j \notin N(x)$, en y_i, $i \notin M(x)$, heten de <u>basisvariabelen.</u>

Voorbeeld. Beschouw wederom voorbeeld 14.8.



Hoekpunt x^1

Basisvariabelen: y_1, y_2, y_3

$S(x^1)$: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Actieve duale variabelen: v_1, v_2

$$\begin{cases} -v_1 = 21 \\ -v_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -21 \\ v_2 = -14 \end{cases}$$

Hoekpunt x^2

Basisvariabelen: x_1, y_1, y_3

$S(x^2)$: $x_2 \geq 0$, $y_2 \geq 0$

Actieve duale variabelen: v_2, u_2

$$\begin{cases} u_2 = 21 \\ -v_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 21 \\ v_2 = -14 \end{cases}$$

Hoekpunt x^3

Basisvariabelen: x_1, x_2, y_3

$S(x^3)$: $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$

Actieve duale variabelen: u_1, u_2

$$\begin{cases} 4u_1 + u_2 = 21 \\ 2u_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = -7 \\ u_1 = 7 \end{cases}$$

Hoekpunt x^4

Basisvariabelen: x_1, x_2, y_2

$S(x^4)$: $y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$

Actieve duale variabelen: u_1, u_3

$$\begin{cases} 4u_1 + 2u_3 = 21 \\ 2u_1 + 3u_3 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 35/8 \\ u_3 = 7/4 \end{cases}$$

Dus hoekpunt x^4 is optimaal.

De simplexmethode wordt een algorithme indien we ook vastleggen hoe een beginhoekpunt x wordt gevonden, en indien we de regel vastleggen die de keuze bepaalt welk hoekpunt na het huidige wordt bezocht.

In het vervolg van deze paragraaf zullen we de simplexmethode algebraïsch behandelen.

We gaan uit van de schrijfwijze

(15.1) $\max \{ \bar{p}^T\bar{x} \mid \bar{A}\bar{x} = b;\ \bar{x} \geq 0\}$

en we veronderstellen dat de kolommen van $\bar{A}$ zo gerangschikt zijn dat $\bar{A} = (B,N)$ met B een niet-singuliere (mxm)-matrix. Door ook $\bar{x}$ op dezelfde manier te rangschikken: $\bar{x}^T = (x_B^T, x_N^T)$ kunnen we schrijven:

(15.2) $\bar{A}\,\bar{x} = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Indien $B^{-1}b \geq 0$ dan is,

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ een hoekpunt van $\bar{R}$. In deze situatie, dus B niet-singulier en $B^{-1}b \geq 0$, gebruiken we de volgende termen:

B : basismatrix	x_B : basisvariabelen
$\bar{x}$: basisoplossing	x_N : niet-basis-variabelen

Er geldt:

(15.3) $\bar{p}^T\bar{x} = p_B^T x_B + p_N^T x_N = p_B^T B^{-1}b - (p_B^T B^{-1}N - p_N^T)x_N$

We definiëren bij dit hoekpunt een vector $d \in \mathbb{R}^{n+m}$, weer gerangschikt als $\begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$, door: $d_B = 0$ en $d_N = (p_B^T B^{-1}N - p_N^T)^T$.

De schrijfwijze $d = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ gebruiken we voor de rangschikking zoals $\bar{x}$ is te ordenen als $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dus $v \in \mathbb{R}^n$ en $u \in \mathbb{R}^m$. Aan het einde van deze paragraaf zien we dat d de met $\bar{x}$ corresponderende duale variabelen geeft.

<u>15.4 Voorbeeld</u>. We nemen het LP-probleem uit het voorbeeld 14.8. De schrijfwijze (15.1) geeft:

$$\max \left\{ 21\bar{x}_1 + 14\bar{x}_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 4\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 12; \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_4 = 2; \\ 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + \bar{x}_5 = 12; \end{array} \bar{x}_j \geq 0,\ 1 \leq j \leq 5 \right\}$$

Neem $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dan is $B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \geq 0$.

De basisvariabelen zijn $\bar{x}_1, \bar{x}_3$ en $\bar{x}_5$; de niet-basisvariabelen zijn $\bar{x}_2$ en $\bar{x}_4$.

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};\qquad \begin{array}{l} p_B^T B^{-1} b = (21,0,0)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 42 \\ p_B^T B^{-1} N - p_N^T = (21,0,0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - (14,0) = (-14,21) \end{array}$$

Alle relevante informatie slaan we op in de volgende stelsels:

$$(15.5)\quad \begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ \bar{p}^T\bar{x} = p_B^T\, B^{-1}b - (p_B^T B^{-1}N - p_N^T)^T x_N \end{cases}$$

		x_N
x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$
x_0	$p_B^T B^{-1}b$	d_N^T

Voor ons voorbeeld krijgen we:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 2 \phantom{ - 2\bar{x}_2} - \bar{x}_4 \\ \bar{x}_3 &= 4 - 2\bar{x}_2 + 4\bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 &= 8 - 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_4 \\ \bar{p}^T\bar{x} &= 42 + 14\bar{x}_2 - 21\bar{x}_4 \end{aligned}$$

		$\bar{x}_2$	$\bar{x}_4$
$\bar{x}_1$	2	0	1
$\bar{x}_3$	4	2	-4
$\bar{x}_5$	8	3	-2
$\bar{x}_0$	42	-14	21

Voor de vector $d = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$ vinden we $d_B^T = (d_1,d_3,d_5) = (0,0,0)$ en $d_N^T = (d_1,d_4) = (-14,21)$.

Voor de andere rangschikking geldt:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ met } x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ y_1 = 4,\ y_2 = 0,\ y_3 = 8$$

en

$$d = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \text{ met } v_1 = 0,\ v_2 = -14,\ u_1 = 0,\ u_2 = 21,\ u_3 = 0.$$

Merk op dat in dit voorbeeld vector d de met $\bar{x}$ corresponderende variabelen geeft, immers:

$$x_j v_j = u_i y_i = 0\ \forall i,j \text{ en } A^T u - v = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} = p.$$

Beschouw weer het lineaire programmeringsprobleem (15.1) in de gedaante (15.5). Om de notatie zo simpel mogelijk te houden, voeren we in:

$$b^* = B^{-1}b,\ A^* = B^{-1}N,\ p^* = p_B^T B^{-1}b \text{ en } d^* = p_B^T B^{-1}N - p_N^T\ .$$

Het stelsel $\bar{A}\bar{x} = b$ is, tezamen met de doelfunctie, te schrijven als:

$$(15.6) \quad \begin{cases} (x_B)_i = b_i^* - \Sigma_{j=1}^n a_{ij}^*(x_N)_j & , i = 1,2,\ldots,m \\ \bar{p}^T\bar{x} = p^* - \Sigma_{j=1}^n d_j^* (x_N)_j \end{cases}$$

Als $d_j^* \geq 0$ voor alle j, dan is $x_B = b^*, x_N = 0$ een optimaal hoekpunt.

We zullen nu het geval beschouwen dat $d_k^* < 0$ voor zekere k, en we laten zien hoe een aangrenzend hoekpunt wordt gevonden. Laat $(x_N)_k$ positief worden, de andere niet-basisvariabelen $(x_N)_j$ houden we op 0. Dus:

$$(x_B)_i = b_i^* - a_{ik}^*(x_N)_k \ , \ i = 1,2,\ldots,m.$$

Als $a_{ik}^* \leq 0$, dan is $(x_B)_i \geq 0$ voor alle $(x_N)_k \geq 0$; als $a_{ik}^* > 0$, dan is

$$(x_B)_i \geq 0 \quad \text{voor } 0 \leq (x_N)_k \leq \frac{b_i^*}{a_{ik}^*} \ .$$

Om er dus voor te zorgen dat het nieuwe punt toelaatbaar is, moet gelden dat

$$(15.7) \quad (x_N)_k \leq \min_{1\leq i\leq m} \left\{ \frac{b_i^*}{a_{ik}^*} \ \middle|\ a_{ik}^* > 0 \right\}$$

Veronderstel dat het minimum in (15.7) gelijk is aan $\frac{b_r^*}{a_{rk}^*}$. Voor $(x_N)_k = \frac{b_r^*}{a_{rk}^*}$ is dan $(x_B)_r = 0$. Dit geeft een nieuw hoekpunt met als niet-basisvariabelen $(x_N)_j$, $j \neq k$, en $(x_B)_r$. Om nu verder te kunnen gaan met de simplexmethode moet deze nieuwe basisoplossing weer in de gedaante (15.6) worden geschreven. Uit de r-de rij van (15.6) volgt dat

$$(15.8) \quad (x_N)_k = \frac{1}{a_{rk}^*} \{b_r^* - \sum_{j\neq k} a_{rj}^*(x_N)_j - (x_B)_r\}.$$

Invullen van (15.8) in (15.6) geeft

$$(x_B)_i = b_i^* - \sum_{j\neq k} a_{ij}^*(x_N)_j - \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*} \{b_r^* - \sum_{j\neq k} a_{rj}^*(x_N)_j - (x_B)_r\}$$

$$= [b_i^* - \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*} b_r^*] - \sum_{j\neq k} [a_{ij}^* - \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*} a_{rj}^*](x_N)_j + \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*} (x_B)_r \ , i \neq r.$$

$$(x_N)_k = \frac{b_r^*}{a_{rk}^*} - \sum_{j\neq k} \frac{a_{rj}^*}{a_{rk}^*}(x_N)_j - \frac{1}{a_{rk}^*}(x_B)_r \ .$$

$$\bar{p}^T\bar{x} = [p^* - \frac{d_k^*}{a_{rk}^*}b_r^*] - \sum_{j\neq k}[d_j^* - \frac{d_k^*}{a_{rk}^*}a_{rj}^*](x_N)_j + \frac{d_k^*}{a_{rk}^*}(x_B)_r .$$

Dit is voor de nieuwe basis weer een schrijfwijze als (15.6).

De r-de rij resp. de k-de kolom in het oude tableau wordt de pivotrij resp. de pivotkolom genoemd. Het element a_{rk}^* heet het pivotelement.

We zien dat de nieuwe i-de rij verkregen wordt uit de oude i-de rij door:

(i) het element uit de pivotkolom, d.w.z. de k-de kolom, die in het nieuwe tableau behoort bij $(x_B)_r$, te delen door (-1) maal het pivotelement.

(ii) van de overige elementen af te trekken $\frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*}$ maal de overeenkomstige elementen uit de pivotrij.

De nieuwe rij voor de doelfunctie wordt op overeenkomstige wijze verkregen. De r-de rij van het nieuwe tableau (behorend bij de nieuwe basisvariabele $(x_N)_k$) wordt verkregen uit de oude rij door het j-de element ($j\neq k$) te delen door het pivotelement, en het k-de element in deze rij wordt $1/a_{rk}^*$.

15.9 Voorbeeld. De simplexmethode toegepast op voorbeeld 15.4 uitgaande van het tableu van voorbeeld 15.4 geeft de volgende serie tableau's. Het element met een * is het pivotelement.

		$\bar{x}_2$	$\bar{x}_4$
$\bar{x}_1$	2	0	1
$\bar{x}_3$	4	2^*	-4
$\bar{x}_5$	8	3	-2
$\bar{x}_0$	42	-14	21

		$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$
$\bar{x}_1$	2	0	1
$\bar{x}_2$	2	1/2	-2
$\bar{x}_5$	2	-3/2	4^*
$\bar{x}_0$	70	7	-7

		$\bar{x}_3$	$\bar{x}_5$
$\bar{x}_1$	3/2	3/8	-1/4
$\bar{x}_2$	3	-1/4	1/2
$\bar{x}_4$	1/2	-3/8	1/4
$\bar{x}_0$	$73\frac{1}{2}$	35/8	7/4

De optimale oplossing is: $\bar{x}_1 = 3/2$, $\bar{x}_2 = 3$, $\bar{x}_3 = 0$, $\bar{x}_4 = 1/2$, $\bar{x}_5 = 0$, $\bar{x}_0 = 73\frac{1}{2}$.

Lineaire programmeringsproblemen waarin altijd $(B^{-1}b)_r > 0$ heten niet-gedegenereerd. De simplexmethode genereert dan steeds andere basisoplossingen. Omdat er slechts eindig veel basisoplossingen zijn, is de simplexmethode voor niet-gedegenereerde problemen eindig. Zonder bewijs vermelden we dat het ook voor gedegenereerde problemen mogelijk is om een eindig simplex-algorithme op te stellen. Daartoe moet de keuze van de pivotkolom een pivotrij nader gespecificeerd worden.

Om de simplexmethode te kunnen uitvoeren is een eerste tableau nodig. Dit kan als volgt worden bepaald. De beperkingen van een LP-probleem kunnen altijd worden opgeschreven in de volgende vorm:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_j\, a_{ij}x_j \le b_i \;,\; i \in I_1, \text{ met } b_i \ge 0 \text{ voor alle } i \in I_1\\
&\Sigma_j\, a_{ij}x_j \le b_i \;,\; i \in I_2, \text{ met } b_i < 0 \text{ voor alle } i \in I_2\\
&\Sigma_j\, a_{ij}x_j = b_i \;,\; i \in I_3, \text{ met } b_i \ge 0 \text{ voor alle } i \in I_3\\
&\qquad x_j \ge 0 \;,\; j = 1,,\ldots,n
\end{aligned}$$

Door niet-negatieve verschilvariabelen y_i, $i \in I_1 \cup I_2$, en <u>schijnvariabelen</u> z_i, $i \in I_2 \cup I_3$ in te voeren, schrijven we het stelsel in de vorm:

$$\begin{aligned}
&\Sigma_j\, a_{ij}x_j + y_i &&= b_i \;,\; i \in I_1\\
&-\Sigma_j\, a_{ij}x_j \quad - y_i + z_i &&= -b_i \;,\; i \in I_2\\
&\Sigma_j\, a_{ij}x_j \qquad\qquad + z_i &&= b_i \;,\; i \in I_3\\
&x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n;\ y_i \ge 0,\ i \in I_1 \cup I_2;\ z_i \ge 0,\ i \in I_2 \cup I_3
\end{aligned}$$

De stelsels zijn equivalent als $z_i = 0$ voor alle $i \in I_2 \cup I_3$. We proberen alle schijnvariabelen 0 te maken door allereerst (dit noemen we de <u>fase I</u> van de simplexmethode) het volgende LP-probleem te beschouwen.

(15.10)

$$\max\left\{-\Sigma_i z_i \;\middle|\; \begin{array}{lll}
\Sigma_j a_{ij}x_j + y_i & = b_i, & i \in I_1;\ x_j \ge 0,\ j=1,2,\ldots,n\\
-\Sigma_j a_{ij}x_j \quad - y_i + z_i & = -b_i, & i \in I_2;\ y_1 \ge 0,\ i \in I_1 \cup I_2\\
\Sigma_j a_{ij}x_j \qquad\qquad + z_i & = b_i, & i \in I_3;\ z_i \ge 0,\ i \in I_2 \cup I_3
\end{array}\right\}$$

Een startoplossing voor (15.10) met B = I is:

$$x_B = \begin{bmatrix} y_i,\ i \in I_1 \\ z_i,\ i \in I_2 \cup I_3 \end{bmatrix},\quad x_N = \begin{bmatrix} x_j,\ i = 1,2,\ldots,n \\ y_i,\ i \in I_2 \end{bmatrix}.$$

Het optimum van (15.10) is gegrensd door 0 en dus heeft (15.10) een eindige optimale oplossing, zeg (x,y,z).

Als $-\Sigma_i z_i < 0$: dan heeft het oorspronkelijke probleem geen toegelaten oplossing.

Als $-\Sigma_i z_i = 0$: dan is $z_i = 0$ voor alle $i \in I_2 \cup I_3$ en dit is een toegelaten oplossing van ons oorspronkelijk probleem; in dit tableau kunnen we nu starten om ons oorspronkelijke probleem op te lossen. Op grond van practische overwegingen is het handig om:

(i) de oorspronkelijke doelfunctie ook in fase 1 mee te transformeren.

(ii) schijnvariabelen die de basis verlaten (en dus de waarde 0 krijgen) op de waarde 0 te houden door ze uit het probleem te verwijderen, d.w.z. de gehele bijbehorende kolom wordt weggelaten.

15.11 Voorbeeld

$$\max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 \quad\quad + x_3 \le 4 & ; & x_1 \ge 0 \\ - x_2 + x_3 \le -1 & ; & x_2 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 & ; & x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

Fase 1: We schrijven de beperkingen in de gedaante:

$$\begin{array}{l} x_1 \quad + x_3 + y_1 = 4 \\ x_2 - x_3 - y_2 + z_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + z_3 = 6 \end{array}$$

en maximaliseren eerst $-(z_2 + z_3) = -7 + x_1 + 3x_2 - 4x_3 - y_2$, uitgaande van de basisvariabelen y_1, z_2, z_3:

		x_1	x_2	x_3	y_2
y_1	4	1	0	1	0
z_2	1	0	1^*	-1	-1
z_3	6	1	2	-3	0
I	-7	-1	-3	4	1
II	0	-1	-1	-1	0

		x_1	x_3	y_2
y_1	4	1	1	0
x_2	1	0	-1	-1
z_3	4	1	-1	2^*
I	-4	-1	1	-2
II	1	-1	-2	-1

		x_1	x_3
y_1	4	1	1
x_2	3	1/2	-3/2
y_2	2	1/2	-1/2
I	0	0	0
II	3	-1/2	-5/2

Fase II: Alle schijnvariabelen zijn nu verdwenen en we kunnen in de fase II de oorspronkelijke doelfuncties maximaliseren uitgaande van het laatste tableau:

		x_1	x_3
y_1	4	1	1^*
x_2	3	1/2	-3/2
y_2	2	1/2	-1/2
	3	-1/2	-5/2

		x_1	y_1
x_3	4	1	1
x_2	9	2	3/2
y_2	4	1	1/2
	13	2	5/2

Optimale oplossing: $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ en $x_3 = 4$.

We zullen nu nader ingaan op het duale LP-probleem. Beschouw een simplex tableau in de gedaante (15.6). We kunnen dit tableau ook gespiegeld lezen als:

$$(15.12)\quad \begin{cases} (u_N)_j = d_j^* + \Sigma_{i=1}^m a_{ij}^*(u_B)_i \ , \ j = 1,2, \dots ,n \\ u_0 \quad = p^* + \Sigma_{i=1}^m b_i^* \ (u_B)_i \end{cases}$$

Ook nu kunnen we substitueren

$$(u_B)_r = \frac{-1}{a_{rk}^*} \{d_k^* + \sum_{i \neq r} a_{ik}^*(u_B)_i - (u_N)_k\} \ .$$

Dit levert het volgende op:

$$(15.13)\quad \begin{cases} (u_N)_j = [d_j^* - \frac{d_k^*}{a_{rk}^*} a_{rj}^*] + \sum_{i \neq 1} [a_{ij}^* - \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*} a_{rj}^*](u_B)_i + \frac{a_{rj}^*}{a_{rk}^*}(u_N)_k \\ (u_B)_r = \frac{-d_k^*}{a_{rk}^*} - \sum_{i \neq r} \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*}(u_B)_i + \frac{1}{a_{rk}^*}(u_N)_k \\ u_0 \quad = [p^* - \frac{d_k^*}{a_{rk}^*} b_r^*] + \sum_{i \neq r} [b_i^* - \frac{a_{ik}^*}{a_{rk}^*} b_r^*](u_B)_i + \frac{b_r^*}{a_{rk}^*} (u_N)_k \end{cases}$$

Deze formules corresponderen precies met de gespiegelde schrijfwijze van het tableau dat op de gewone manier is getransformeerd. In de startoplossing correspondeert de gespiegelde schrijfwijze met het stelsel $v = -p + A^T u$. Ieder simplextableau bevat dus een toelaatbare oplossing $u_B = 0$, $u_N = d^*$ van dit stelsel. Omdat in het optimale simplextableau $b^* \geq 0$ en $d^* \geq 0$ is dit tevens een optimale oplossing van het duale probleem. De simplexmethode lost dus het primale en duale probleem tegelijk op.

<u>15.14 Voorbeeld</u>. Beschouw het voorbeeld op pagina 20. Het duale LP probleem luidt:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & 12u_1 + 2u_2 + 12u_3 \\ \text{onder} & 4u_1 + u_2 + 2u_3 - v_1 \qquad = 21 \\ & 2u_1 \qquad + 3u_3 \qquad - v_2 = 14 \\ & u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 \geq 0 \end{array}$$

De tableau's uit voorbeeld 15.9 corresponderen respectievelijk met $(v_1 = u_1 = u_3 = 0,\ v_2 = -14,\ u_2 = 21)$, $(v_1 = v_2 = u_3 = 0,\ u_1 = 7,\ u_2 = -7)$ en $(v_1 = v_2 = u_2 = 0,\ u_1 = 35/8\ ,\ u_3 = 7/4)$.
Omdat alle variabelen niet-negatief zijn is deze laatste oplossing optimaal.

15.15 Voorbeeld. Beschouw voorbeeld (15.11). Het duale LP-probleem is

$$\begin{array}{lrl}
\min & 4u_1 - u_2 + 6u_3 & \\
\text{onder} & u_1 \quad\;\; + u_3 - v_1 \qquad\quad\;\; & = 1 \\
 & - u_2 + 2u_3 \qquad - v_2 \qquad & = 1 \\
 & u_1 + u_2 - 3u_3 \qquad\qquad\quad - v_3 & = 1 \\
 & u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \geq 0. &
\end{array}$$

Uit het laatste tableau van voorbeeld 15.11 volgt voor de optimale oplossing

$$v_3 = v_2 = u_2 = 0,\ v_1 = 2,\ u_1 = 2\tfrac{1}{2}.$$

Omdat we de kolom van de schijnvariabele z_3 hebben weggelaten volgt u_3 niet uit dit tableau. Om u_3 te bepalen moeten we de reeds bekende waarden van u en v invullen in $A^T u - v = p$. Dit geeft:

$$u_1 + u_3 - v_1 = 1 \rightarrow u_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Opgave 1

Geef voor ieder hoekpunt van het lineaire programmeringsprobleem

$$\max \left\{ 2x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5; \\ x_1 \qquad\;\; \leq 4;\ x_1, x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 \leq 2; \end{array} \right\}$$

de basisvariabelen, de kegel van toegelaten richtingen en de actieve duale variabelen. Wat is de optimale oplossing van dit probleem?

Opgave 2

Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing van het probleem uit opgave 1.

Opgave 3

a. Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing van

$$\max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 6\ ;\ x_1 \geq 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \leq 4\ ;\ x_2 \geq 0 \\ \qquad\; x_2 - x_3 \leq 1\ ;\ x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

Opgave 4

Een ijsfabriek heeft een machine die 400 liter ijs kan produceren per uur. Er kunnen 3 soorten ijs (A,B en C) worden geproduceerd welke per liter een winst van resp. *f* 2,-, *f* 1,- en *f* 2,- opleveren.

Voor 15 liter van soort A is nodig: 9 liter room, 30 eieren en 1 kg suiker.

Voor 16 liter van soort B is nodig: 8 liter room, 40 eieren en 2 kg suiker.

Voor 24 liter van soort C is nodig: 12 liter room, 60 eieren en 1 kg suiker.

Per uur is 250 liter room, 900 eieren en 40 kg suiker beschikbaar.

a. Stel een lineaire programmeringsprobleem op waarmee kan worden berekend hoeveel liter van soort A, soort B en soort C per uur moet worden geproduceerd om een maximale winst te maken.

b. Formuleer het duale lineaire programmeringsprobleem.

c. Bewijs dat een optimale oplossing correspondeert met de produktie van alleen soort A en geef de optimale oplossing van het duale probleem.

Opgave 5

Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\max\left\{ x_1 - 5x_2 - 2x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 8 \;; \\ x_1 - 3x_2 \qquad \leq 3 \;; \end{array} \; x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\} .$$

a. Los het probleem op met de simplexmethode.

b. Formuleer het duale probleem en geef een optimale oplossing ervan.

Opgave 6

Beschouw een produktieproces, waarbij de stoffen A,B,C en D als volgt in produkten E, F en G worden omgezet:

1 kg A + 1 kg B $\rightarrow$ 1 kg E + 1 kg D ;

2 kg B + 1 kg C $\rightarrow$ 1 kg F + 2 kg D ;

1 kg A + 4 kg D $\rightarrow$ 1 kg G + 3 kg B + 1 kg C.

De produkten E, F en G worden verkocht tegen prijzen van resp. f 100,-, f 200,- en f 300,- per kg.

Verder moet het produktieproces aan de volgende eisen voldoen:

van stof A kan hoogstens 400 kg worden gebruikt;

van stof B moet precies 600 kg worden gebruikt;

van stof C moet minstens 100 kg worden gebruikt.

a. Hoeveel moet van de stoffen E, F en G worden geproduceerd om de opbrengst te maximaliseren? Los dit probleem op met de simplexmethode.
b. Hoe luidt het duale probleem en wat is een optimale oplossing ervan?

Opgave 7

a. Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing van:

$$\max \left\{ 8x_1 - 3x_2 - 2x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \le 5 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7 \;;\; x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \;;\; x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.
c. Is de oplossing van het oorspronkelijke probleem uniek? En de oplossing van het duale probleem? Verklaar uw antwoord.

Opgave 8

a. Los het volgende lineaire programmeringsprobleem op:

$$\max \left\{ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+2x_5+x_6 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 2x_3 + x_4 - x_6 \le 2\tfrac{1}{2};\; x_1,x_2 \ge 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 + x_6 \ge \tfrac{1}{2};\; x_3,x_4 \ge 0 \\ x_2 + x_3 = 1;\; x_5,x_6 \ge 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1; \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

Opgave 9

Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\max \left\{ x_1 - 3x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 3 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 + x_3 \le 5 \;;\; x_2 \ge 0 \\ -x_2 + x_3 \le 0 \;;\; x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

a. Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing.
b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.
c. Wat is een optimale oplossing als de eerste beperking luidt:
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$?
d. Wat is een optimale oplossing als niet wordt geëist dat $x_2 \ge 0$ is?

Opgave 10

Een bedrijf heeft 10 arbeiders in dienst en beschikt verder over 3 machines van type A en 2 van type B. Het kan daarmee 3 produkten maken: X, Y en Z.
Voor het maken van X zijn per produktie-eenheid 4 arbeiders en 1 machine van type A nodig; voor het maken van Y zijn per produktie-eenheid 3 arbeiders, 1 machine van type A en 1 machine van type B nodig; voor het maken van produkt Z zijn per produktie-eenheid 2 arbieders en 2 machines van type B nodig.
De opbrengsten van deze produkten zijn voor X, Y en Z resp. *f* 1000,-, *f* 500,- en *f* 800,- per eenheid.
Beschouw het produktieproces gedurende één dag (de produktietijd voor het maken van een eenheid van X, Y of Z is ook één dag, en de produkten kunnen tegelijk worden geproduceerd).
Gevraagd wordt hoeveel van de produkten X, Y en Z geproduceerd moet worden om de winst te maximaliseren.

a. Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem.
b. Los dit probleem op met de simplex methode.
c. Formuleer het duale probleem en geef een optimale oplossing er van.
d. Als het *f* 100,- per dag kost om over een machine van type A te beschikken, is het dan voor het bedrijf voordelig om over slechts 2 machines van type A te beschikken? Verklaar uw antwoord.
e. Als het *f* 200,- per dag kost om een extra arbeider in te zetten, is het dan voor het bedrijf voordelig om meer arbeiders te hebben? Zo ja, hoeveel is dan het meest gunstig?

Opgave 11

Beschouw het probleem

$$\max \left\{ 2x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \;; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \;; \quad x_j \geq 0 \;,\; j = 1,2,\ldots,5 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \;; \end{array} \right\}$$

Toon aan, zonder probleem op te lossen, dat x_1, x_2 x_4 de basisvariabelen zijn behorende bij een optimale oplossing.

16. Kortste paden in netwerken

Zij $G = (V,A)$ een gerichte graaf met knooppuntenverzameling $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en pijlenverzameling A. Aan iedere pijl $(v_i, v_j) \in A$ is een reëel getal l_{ij} toegevoegd dat we de lengte van de pijl zullen noemen. Als lengte van een pad nemen we de som van de lengten van de pijlen van dit pad.

We nemen aan dat G een <u>netwerk</u> is t.o.v. de <u>lengtefunctie</u> l, d.w.z. dat de lengte van iedere ronde positief is. We kunnen dan vragen naar het kortste pad vanuit een knooppunt v_1 naar een willekeurig ander knooppunt v_i. We zullen laten zien hoe dit <u>kortste pad probleem</u> met lineaire programmering kan worden opgelost en dat dit tegelijk de kortste paden bepaalt van v_1 naar alle overige knooppunten.

In deze paragraaf nemen we aan dat we een netwerk hebben met lengtefunctie l en dat er een pad is van v_1 naar ieder ander knooppunt v_i, $i = 2,3,\ldots,n$. Door voor $l_{ij} = +\infty$ te nemen als $(v_i, v_j) \notin A$ mogen we wel aannemen dat de graaf volledig is.

Definieer: $u_1^* = 0$

u_i^* = lengte van het kortste pad van v_1 naar v_i, $i = 2,3,\ldots,n$.

16.1 STELLING

(i) De getallen u_i^*, $i = 1,2,\ldots,n$ voldoen aan de zgn. Bellman-vergelijkingen

$$(16.2) \qquad \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_i = \min\limits_{k \neq i} (u_k + l_{ki}) \ , \ i = 2,3, \ \ldots \ ,n \end{cases}$$

(ii) Met iedere oplosing van de Bellman-vergelijkingen correspondeert een voortbrengende boom met wortel v_1 (d.w.z. een boom die gerichte paden heeft van v_1 naar alle andere knooppunten) z.d.d. u_i precies de afstand in de boom van v_1 naar v_i is.

(iii) Er is een boom van kortste paden.

(iv) u_i^* , $i = 1,2,\ldots,n$ is de enige oplossing van de Bellmanvergelijkingen.

BEWIJS:

(i) Het is duidelijk dat $u_i^* \leq u_k^* + l_{ki}$ $\forall$ k. Dus ook $u_i^* \leq \min\limits_{k \neq i} (u_k^* + l_{ki})$.

Voor ieder knooppunt v_i $(i \neq 1)$ heeft een kortste pad van v_1 naar v_i een v_i een laatste pijl, zeg (v_{k_i}, v_i). Het gedeelte van het pad tot aan v_{k_i}

moet een kortste pad zijn van v_1 naar v_{k_i}. Dus:

$$u_i^* = u_{k_i}^* + l_{k_i i} \geq \min_{k \neq i} (u_k^* + l_{ki}).$$

Hiermee is bewezen dat $u_i^* = \min_{k\neq i} (u_k^* + l_{ki})$ $i = 2,3,\ldots,n$.

(ii) Stel u_i, $i = 1,2,\ldots,n$ is een oplossing van de Bellmanvergelijkingen. Voor iedere $i\neq 1$ is er dus een k_i zdd. $u_i = u_{k_i} + l_{k_i i}$. Beschouw nu de deelgraaf bestaande uit de pijlen (v_{k_i}, v_i) $i = 2,3,\ldots,n$ en de bijbehorende knooppunten. Dit geeft een deelgraaf met $n - 1$ pijlen. Stel er is een ronde in deze deelgraaf, zeg $[v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_j} = v_{i_1}]$. Dan geldt:

$$l_{i_k i_{k+1}} = u_{i_{k+1}} - u_{i_k}, \; k = 1,2, \; \ldots \; ,j-1.$$

De lengte van de ronde is dus

$$\Sigma_{k=1}^{j-1} l_{i_k i_{k+1}} = \Sigma_{k=1}^{j-1} u_{i_{k+1}} - \Sigma_{k=1}^{j-1} u_{i_k} = 0,$$

omdat $i_j = i_1$. Dit geeft een tegenspraak en de deelgraaf heeft dus geen ronden. Omdat er naar iedere knooppunt $v_i \neq v_1$ precies één pijl gericht is kunnen we, als we in een willekeurig knooppunt beginnen en tegen de richting van de pijlen inlopen, slechts eindigen in v_1. Dit impliceert dat de deelgraaf een voortbrengende boom met wortel v_1 is. Uit de constructie volgt tevens dat u_i de afstand in de boom is van v_1 naar v_i.

(iii) Volgt uit (i) en (ii).

(iv) Stel u_i , $i = 1,2,\ldots,n$ is ook een oplossing. Volgens (ii) is dan $u_i > u_i^*$ als $u_i \neq u_i^*$ en $u_{k_i} = u_{k_i}^*$ met (v_{k_i}, v_i) een pijl in de boom van kortste paden. Omdat $u_1 = u_1^* = 0$ moet er zo'n i en k_i bestaan. We krijgen nu de volgende tegenspraak:

$$u_i > u_i^* = u_{k_i}^* + l_{k_i i} = u_{k_i} + l_{k_i i} \geq \min_{k\neq i} (u_k + l_{ki}) = u_i. \qquad \blacksquare$$

16.3 STELLING

De getallen u_i^* , $i = 1,2, \; \ldots \; ,n$ zijn de unieke oplossing van het lineaire programmeringsprobleem

$$(16.4) \qquad \max \left\{ \Sigma_{i=1}^{n} u_i \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_i - u_k \leq l_{ki} \quad \text{voor alle } (k,i) \text{ met } (v_k,v_i) \in A \end{array} \right\}$$

BEWIJS:

Uit stelling (16.1) volgt dat u^* een toegelaten oplossing van (16.4) is. Laat ook u een toegelaten oplossing zijn en neem een willekeurige v_i. Met inductie naar het aantal pijlen op het pad van v_1 naar v_i in de boom bij u^* bewijzen we dat $u_i^* \geq u_i$.

Als deze lengte 1 is: $u_i^* = l_{1i} = u_1 + l_{1i} \geq u_i$.

Als deze lengte j is en $u_{k_i}^* \geq u_k$ indien lengte tot v_k hoogstens j-1 is:

Laat (v_{k_i}, v_i) de pijl in de boom zijn die naar v_i loopt. Dan is volgens de inductieveronderstelling $u_{k_i}^* \geq u_{k_i}$, waaruit volgt:

$$u_i^* = u_{k_i}^* + l_{k_i i} \geq u_{k_i} + l_{k_i i} \geq u_i. \qquad \blacksquare$$

Beschouw het duale lineaire programmeringsprobleem van (16.4):

$$\text{(16.5)} \quad \min \left\{ \Sigma_k \Sigma_i \, l_{ki} \, x_{ki} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - \Sigma_i \, x_{1i} = 1 \\ \Sigma_j \, x_{ji} - \Sigma_j \, x_{ij} = 1 \quad i = 2,3,\ldots,n \\ x_{ki} \geq 0 \quad \text{voor alle } (k,i) \text{ met } (v_k, v_i) \in A \end{array} \right\}$$

Laat x nu een basisoplossing van (16.5) zijn, dan heeft x maximaal n positieve componenten. Uit de vergelijkingen volgt:

$$x_1 = 1 + \Sigma_i \, x_{1i} \geq 1 \text{ , dus } x_1 \text{ is positief;}$$

$$\Sigma_j \, x_{ji} = 1 + \Sigma_j \, x_{ij} \geq 1 \text{ , dus } \Sigma_j \, x_{ji} \text{ is positief, } i = 2,3,\ldots n.$$

Maar dan is van de variabelen x_{ji} er precies één positief, zeg $x_{k_i i} > 0$, $i = 2,3,\ldots,n$.

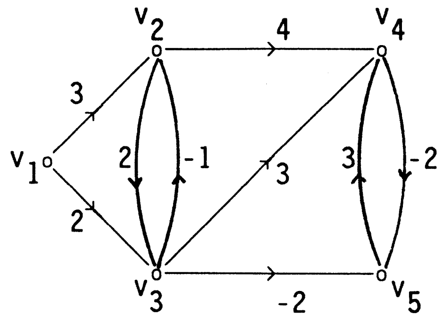
Beschouw nu de deelgraaf bestaande uit de pijlen (v_{k_i}, v_i), $i = 2,3,\ldots,n$ en de bijbehorende knooppunten. Net zoals in het bewijs van 16.1 (ii) is in te zien dat dit een voortbrengende boom met wortel v_1 is.

Omgekeerd, zij (v_{k_i}, v_i), $i = 2,3,\ldots,n$ de pijlen van een voortbrengende boom met wortel v_1. In de matrix behorende bij de kolommen van x_1 en die van $x_{k_i i}$, $i = 2,3,\ldots,n$, staat in rij i alleen het getal +1 (verder slechts nullen) als

v_i een eindpunt is van de boom. Een lineaire combinatie van deze kolommen z.d.d. dit de 0-vector oplevert heeft dus coëfficiënten 0 voor kolommen behorende bij eindpunten van de boom. Door nu deze eindpunten en de pijlen er naar toe weg te laten is inductief in te zien dat de kolommen van de matrix lineair onafhankelijk zijn, en dus behoren bij een basisoplossing.

Conclusie: er is een één-éénduidig verband tussen de hoekpunten van het LP-probleem (16.5) en de voortbrengende bomen met wortel v_1.

<u>16.6 Voorbeeld.</u> Beschouw het hieronder getekende netwerk



Probleem (16.4) luidt: $$\max\left\{ \sum_{i=1}^{5} u_i \;\middle|\; \begin{array}{ll} u_1 = 0 & ;\ u_4 - u_2 \le 4 \\ u_2 - u_1 \le 3; & u_4 - u_3 \le 3 \\ u_2 - u_3 \le -1; & u_4 - u_5 \le 3 \\ u_3 - u_1 \le 2; & u_5 - u_3 \le -2 \\ u_3 - u_2 \le 2; & u_5 - u_4 \le -2 \end{array} \right\}$$

Het duale probleem wordt:

$$\min\left\{ \begin{array}{l} 3x_{12} - x_{32} + \\ 2x_{13} + 2x_{23} + \\ 4x_{24} + 3x_{34} + \\ 3x_{54} - 2x_{35} - \\ 2x_{45} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_1 - x_{12} - x_{13} = 1; & \\ x_{12} + x_{32} - x_{23} - x_{24} = 1; & x_{ki} \ge 0 \\ -x_{32} + x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 1; & \text{voor alle} \\ x_{24} + x_{34} + x_{54} - x_{45} = 1; & (k,i) \in A \\ -x_{54} + x_{35} + x_{45} = 1; & \end{array} \right\}$$

De voortbrengende boom $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ correspondeert met de basisoplossing: $x_{45} = 1$, $x_{34} = 2$, $x_{23} = 3$, $x_{12} = 4$, $x_1 = 5$ en de overige variabelen 0.

Hoe werkt nu de simplexmethode voor probleem (16.5)? Daarvoor moeten we starten met een basisoplossing, zeg x. Beschouw de daarmee corresponderende boom, zeg (v_{k_i}, v_i), $i = 2,3,\ldots,n$: $x_{k_i i} > 0$, $2 \le i \le n$, en voor de correspon-de duale variabelen geldt:

$v_{k_i i} = l_{k_i i} + u_{k_i} - u_i = 0 \Rightarrow u_i = u_{k_i} + l_{k_i i}$, $i = 2,3,\ldots,n$, d.w.z.

u_i is de boomafstand van v_1 naar v_i , $2,3,\ldots,n$. Uit deze waarden u_i kunnen de overige duale variabelen $v_{ij} = l_j + u_i - u_j$ worden berekend. Volgens de simplexmethode moeten we nu een negatieve duale variabele, zeg v_{rp}, kiezen, d.w.z. dat in de corresponderende voortbrengende boom de pijl (v_{k_p}, v_p) wordt vervangen door (v_r, v_p).

Voor deze nieuwe boom moeten weer de nieuwe duale u-variabelen, d.w.z. de lengten in het boompad, worden berekend. Aangezien $u_j = u_i + l_{ij}$ voor alle (i,j) met (v_i, v_j) in de boom, zullen alleen die u_j's veranderen die vanuit v_1 bereikt worden via v_p.

Stel de oude boomafstand van v_1 naar v_p is u_p en de nieuwe $\bar{u}_p$, dan is de verbetering van de afstand van v_1 naar v_p (en dus ook van alle afstanden van v_1 tot de opvolgeers van v_p):

$$u_p - \bar{u}_p = u_p - (\bar{u}_r + l_{rp}) = u_p - u_r - l_{rp} = -v_{rp} > 0.$$

De simplexmethode om de kortste paden vanuit v_1 te bepalen komt neer op het volgende algoritme.

<u>Stap 1 (start)</u>:

Bepaal een voortbrengende boom met wortel v_1 en bereken u_j = afstand v_1 tot v_j in de boom, $j = 1,2,\ldots,n$.

<u>Stap 2 (optimaliteitscontrole)</u>:

Bereken $v_{ij} = l_{ij} + u_i - u_j$ voor alle (i,j) met (v_i, v_j) niet in de boom.

Als $v_{ij} \geq 0$ voor alle (i,j): $u_j = u_j^*$, $j = 1,2,\ldots,n$ en de bijbehorende boom is de boom van kortste paden; STOP.

<u>Stap 3 (nieuwe voortbrengende boom)</u>:

Kies (r,p) zodat $v_{rp} < 0$.

Vervang in de boom de huidige pijl naar p door de pijl (v_r, v_p).

$u_j := u_j + v_{rp}$ voor $j = p$ en alle j die in de boom vanuit p bereikbaar zijn.

Ga naar stap 2.

Uit bovenstaand algorithme volgt dat we in stap 2 niet steeds alle v_{ij} hoeven te berekenen, maar dat we zodra een negatieve waarde wordt gevonden naar stap 3 kunnen gaan.

16.7 Voorbeeld.

Beschouw het netwerk uit voorbeeld 16.6. De berekening van de getallen v_{ij} gebeurt cyclisch, d.w.z. in een nieuwe iteratie gaan we verder bij waar we in de vorige iteratie waren gebleven, en na de laatste gaan we met de eerste verder.

1e iteratie:

1. Start met de boom $\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4, v_5)\}$.

   $u_1 = 0$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 8$; $u_5 = 6$.
2. $v_{13} = 2 + 0 - 5 = -3$
3. Boom = $\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5)\}$

   $u_3 = 2$; $u_4 = 5$; $u_5 = 3$.

2e iteratie:

2. $v_{23} = 2 + 3 - 2 = 3$; $v_{24} = 4 + 3 - 5 = 2$; $v_{32} = -1 + 2 - 3 = -2$
3. Boom = $\{(v_3,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5)\}$

   $u_2 = 1$

3e iteratie:

2. $v_{35} = -2 + 2 - 3 = -3$
3. Boom = $\{(v_3,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5)\}$

   $u_5 = 0$

4e iteratie:

2. $v_{45} = -2 + 5 - 0 = 3$; $v_{54} = 3 + 0 - 5 = -2$
3. Boom = $\{(v_3,v_2),(v_1,v_3),(v_5,v_4),(v_3,v_5)\}$

   $u_4 = 3$

5e iteratie:

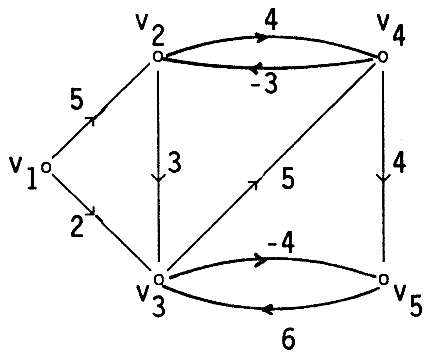
2. $v_{12} = 3 + 0 - 1 = 2$; $v_{23} = 2 + 1 - 2 = 1$; $v_{24} = 4 + 1 - 3 = 2$;

   $v_{34} = 3 + 2 - 3 = 2$; $v_{45} = -2 + 3 - 0 = 1$;

   deze oplossing is optimaal met $u^* = (0,1,2,3,0)$.

Opgave 1

Bepaal met de simplexmethode de kortste paden vanuit v_1 voor onderstaand netwerk.



Opgave 2

Beschouw de gerichte graaf $G = (V,A)$ met $V = \{v_1,v_2,v_3\}$ en $A = \{(v_1,v_2), (v_2,v_3),(v_3,v_2)\}$ en de lengte functie l met $l_{12} = 10$, $l_{23} = 1$, $l_{32} = -1$.

Toon aan dat de Bellman vergelijkingen voor dit netwerk geen unieke oplossing hebben. Karakteriseer de verzameling van alle oplossingen.

Opgave 3

Beschouw een gerichte graaf $G = (V,A)$ waarin geen ronden voorkomen.

a. Toon aan dat de knooppunten zo genummerd kunnen worden dat $(v_i,v_j) \in A$ impliceert $i < j$.

b. Geef een algoritme, verschillend van de simplexmethode, om de lengten van de kortste paden in dit netwerk te bepalen.

c. Geef een algoritme om de lengten van de langste paden in dit netwerk te bepalen.

d. Pas bovenstaande onderdelen toe op het netwerk met lengten (de niet genoemde pijlen komen niet voor):

$l_{12} = 1$; $l_{32} = 3$; $l_{43} = -4$; $l_{53} = 2$; $l_{13} = 0$;

$l_{36} = -1$; $l_{45} = 4$; $l_{26} = -2$; $l_{41} = -5$; $l_{51} = 0$.

Opgave 4

Laat x een basisoplossing zijn van het LP-probleem (16.5) met corresponderende voortbrengende boom T.

Als x_{ki} een basisvariabele is, dan is de waarde er van gelijk aan het aantal in T vanuit v_i bereikbare knooppunten, inclusief v_i zelf. Toon dit aan.

V. KOPPELINGEN

Literatuur

L. Minsky : "Transversal theory", Academic Press, 1971.
R.J. Wilson: "Introduction to graph theory", Longman, 1985.

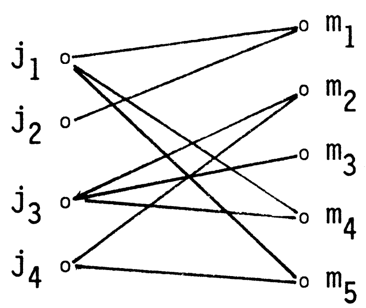
17. De huwelijksstelling van Hall

Zij J een groep van jongens en M een groep van meisjes. Ieder der jongens is bevriend met een aantal van de meisjes. Onder welke voorwaarde is het mogelijk dat iedere jongen trouwt met een bevriend meisje? Polygamie is uitgesloten. Dit probleem is het beroemde huwelijksprobleem.

Bijvoorbeeld, zij $J = \{j_1,j_2,j_3,j_4\}$ en $M = \{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5\}$.
De vriendschapsrelatie wordt gegeven door: j_1 is bevriend met de meisjes $\{m_1,m_4,m_5\}$; de jongen j_2 met het meisje $\{m_1\}$; de jongen j_3 met de meisjes $\{m_2,m_3,m_4\}$ en de jongen j_4 met de meisjes $\{m_2,m_5\}$. Een huwelijkskoppeling tussen bevriende paren is hier mogelijk, bijv. $(j_1\&m_4)$, $(j_2\&m_1)$, $(j_3\&m_3)$, en $(j_4\&m_2)$. Dit huwelijksprobleem kan grafisch worden voorgesteld door voor de graaf G te nemen een bipartiete graaf met disjuncte partitie-verzamelingen V_1 en V_2.

Zij $V_1 = \{j_1,j_2,j_3,j_4\}$ en $V_2 = \{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5\}$. Een jongen en meisje die bevriend zijn verbinden we door een tak. In figuur (17.1) is de graaf getekend.

(17.1)



Een <u>volledige koppeling</u> van V_1 naar V_2 in een bipartiete graaf $G(V_1,V_2)$ is een één-één-correspondentie tussen de knooppunten van V_1 en een deelverzameling van de knooppunten van V_2 met de eigenschap dat corresponderende knooppunten met een tak verbonden zijn. Het is duidelijk dat het huwelijksprobleem in grafentaal kan worden gesteld als: "indien $G = G(V_1,V_2)$ een bipartiete graaf is, onder welke voorwaarden bestaat er een volledige koppeling van V_1 naar V_2 in G?"

Het is ook duidelijk dat een noodzakelijke voorwaarde voor een oplossing van het huwelijksprobleem is: de jongens uit iedere verzameling van k jongens moeten tezamen tenminste k bevriende meisjes hebben voor $1 \leq k \leq n$ (n is het aantal jongens). Immers indien dit niet het geval is, dan kunnen deze k jongens niet uitgehuwelijkt worden, dus zeker niet alle jongens. Het verrassende is nu dat deze voorwaarde ook voldoende blijkt te zijn. Dit is de inhoud van de huwelijksstelling van Hall.

17.2 STELLING (*huwelijksstelling van Hall,1935*)
Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor een oplossing van het huwelijksprobleem is dat iedere verzameling van k jongens tenminste k bevriende meisjes heeft ($1 \leq k \leq n$).

1e BEWIJS:
Zoals we hierboven al zeiden is de voorwaarde noodzakelijk. Dat de voorwaarde ook voldoende is, tonen we aan via volledige inductie naar n. De stelling is klaarblijkelijk juist voor $n = 1$. Stel ze is ook juist voor $n \leq m-1$. Veronderstel dat er m jongens zijn. We beschouwen twee gevallen:

(i) iedere verzameling van k jongens ($1 \leq k < m$) heeft tenminste (k+1) bevriende meisjes. In dit geval kunnen we een willekeurige jongen met een vriendin laten huwen en blijft de voorwaarde van de stelling geldig voor de overige (m-1) jongens. Volgens de inductie hypothese kunnen deze jongens met een vriendin trouwen. Voor dit geval is de inductiestap dus bewezen.

(ii) er is een verzameling van k jongens ($1 \leq k < m$) die precies met k meisjes bevriend is. Volgens de inductie-aanname kunnen deze k jongens met een vriendin trouwen.Iedere verzameling van h der n-k nog ongetrouwde jongens moet tenminste met h van de overblijvende meisjes bevriend zijn. Immers, indien dit niet het geval is, dan heeft deze verzameling van h jongens tezamen met de k getrouwde jongens, tezamen minder dan h+k bevriende meisjes. Volgens de inductie aanname kunnen ook de (m-k) overblijvende jongens trouwen met een vriendin. Ook voor het geval (ii) is de inductiestap dus bewezen, waarmee het bewijs geleverd is. ■

We zullen voor deze stelling ook een constructief bewijs geven.

2e BEWIJS:
Stel r jongens zijn reeds gekoppeld aan een bevriend meisje. Indien $r = n$ dan is de koppeling volledig. veronderstel dus dat $r < n$.
Indien er een jongen is die een bevriend doch ongehuwd meisje heeft, dan kunnen zij huwen. Op deze wijze is er een koppeling van van $r+1$ jongens geconstrueerd.
Stel nu dat geen der ongehuwde jongens een bevriend en ongehuwd meisje kent. Kies nu een willekeurige ongehuwde jongen, zeg j_0. Er is tenminste één meisje waarmee hij bevriend is, kies er één, zeg meisje m_1. Dit meisje is gehuwd, zeg met jongen j_1. De jongens j_0 en j_1 hebben tezamen tenminste twee bevriende meisjes, naast m_1 is er dus nog tenminste één ander bevriend meisje, kies er één, zeg meisje m_2. Stel dit meisje is gehuwd met jongen j_2. De jongens j_0, j_1 en j_2 hebben tenminste drie bevriende meisjes, etc. Daar het aantal meisjes groter is dan het aantal reeds gehuwde jongens, moeten we op deze wijze een ongehuwd bevriend meisje vinden, zeg het meisje m_k is ongehuwd. Door onze keuze van de bevriende meisjes weten we dat ieder meisje m_p met $1 \leq p \leq k$ bevriend is met tenminste één van de jongens $\{j_0,j_1,...,j_{p-1}\}$.
Beschouw nu het meisje m_k, laat haar huwen met een bevriende jongen uit $\{j_0,j_1,...,j_{k-1}\}$, zeg jongen j_p,dan geldt $p < k$. Dit ontbindt de huwelijkskoppeling van het meisje m_p. Het meisje m_p is bevriend met tenminste één van de jongens uit $\{j_0,j_1,...,j_{p-1}\}$. Laat het meisje m_p huwen met één van deze jongens, zeg jongen j_s, dan geldt $s < p$. We zetten deze herschikking der huwelijksrelaties voort totdat er een meisje vrij komt dat bevriend is met de jongen j_0. Indien zij huwen, dan is ook in dit geval een koppeling van $r+1$ jongens geconstrueerd. In een eindig aantal stappen vinden we op deze wijze een volledige koppeling. ∎

Het tweede bewijs levert een algorithme om het huwelijksprobleem op te lossen.

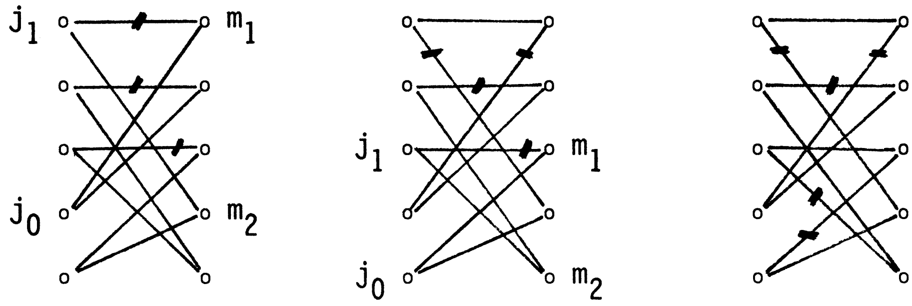
stap 1: Als er een ongehuwde jongen is die bevriend is met een ongehuwd meisje, dan kunnen zij huwen (herhaal deze stap zolang dit mogelijk is).
stap 2: Als alle jongens gehuwd zijn: stop.
Anders: ga naar stap 3.
stap 3: Laat j_0 een ongehuwde jongen zijn; kies een meisje m_1 waarmee hij bevriend is; $k = 1$.
stap 4: Stel m_k is gehuwd met j_k; laten $j_0,j_1,...,j_k$ bevriend zijn met $m_1,m_2,...,m_{k+1}$; $k := k + 1$.
stap 5: Als m_k ongehuwd is: ga naar stap 6.
Anders: ga naar stap 4.

<u>stap 6</u>: Laat meisje m_k huwen met bevriende jongen uit $\{j_0,j_1,..,k_{k-1}\}$, zeg j_p.
Als $p = 0$: ga naar stap 1.
Anders: ga naar stap 7.

<u>stap 7</u>: $k := p$ en ga naar stap 6.

<u>Opmerking</u>: Het lijkt verstandig om in stap 6 de kleinst mogelijke p te kiezen, en in stap 4 voor m_{k+1} een ongehuwd meisje te kiezen als dit kan.

<u>Voorbeeld</u>:



nu is iedereen gehuwd

We zullen de stelling van Hall ook formuleren in de taal van koppelingen in een bipartiete graaf.

17.3 GEVOLG

Zij $G = G(V_1,V_2)$ een bipartiete graaf. Voor $V^* \subseteq V_1$ laat $\Gamma(V^*)$ de knooppunten in V_2 zijn die met tenminste één der knooppunten in V^* incident zijn.
Een volledige koppeling van V_1 naar V_2 bestaat d.e.s.d. als $|V^*| \leq |\Gamma(V^*)|$ voor iedere deelverzameling V^* van V_1.

BEWIJS:

Het bewijs volgt meteen uit stelling 17.2 door vertaling van deze stelling in grafentaal.

Opgave 1.

Beschouw het volgende huwelijksprobleem met 5 jongens en 5 meisjes:
j_1 is bevriend met meisje m_1; j_2 met de meisjes m_2,m_5; j_3 met de meisjes m_1,m_3,m_4 en m_5 ; j_4 met meisje m_5 en j_5 met de meisjes m_1,m_2 en m_5.

a. Bepaal hoeveel huwelijken er maximaal mogelijk zijn.

b. Verklaar waarom er geen volledige koppeling mogelijk is.

Opgave 2

Toon aan dat als iedere jongen met precies r meisjes en ieder meisje met precies r jongens bevriend is, het huwelijksprobleem een oplossing heeft (r is een willekeurig natuurlijk getal).

18. Transversalen

In deze paragraaf zullen we de huwelijksstelling geven in de taal van de theorie over transversalen.
In het voorbeeld van paragraaf 17 hadden we als verzamelingen van meisjes die bevriend waren met de vier jongens respectievelijk: $\{m_1,m_4,m_5\}$, $\{m_1\}$, $\{m_2,m_3m_4\}$ en $\{m_2,m_5\}$. Een oplossing van het huwelijksprobleem werd gevonden door vier verschillende m's te kiezen, één uit ieder der verzamelingen.
In het algemeen, als E een eindige niet-lege verzameling is en $\mathcal{S} = (S_1,\ldots,S_n)$ is een stelsel van niet-lege deelverzamelingen van E, dan noemen we n verschillende elementen van E een <u>transversaal</u> (of ook wel een <u>stelsel van verschillende representanten</u>), indien er een 1-1-correspondentie tussen de n elementen en de n deelverzamelingen is zdd. ieder der elementen in zijn corresponderende verzameling bevat is.

Laten we een ander voorbeeld bekijken.
Zij $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ en $S_1 = S_2 = \{1,2\}$, $S_3 = S_4 = \{2,3\}$, $S_5 = \{1,4,5,6\}$.
Het is hier onmogelijk om 5 verschillende representanten te kiezen. De collectie $\mathcal{S} = (S_1,\ldots,S_5)$ heeft geen transversaal. Echter de deelcollectie $\mathcal{S}'$ $= (S_1,S_2,S_3,S_5)$ heeft wel een transversaal, bijv. $\{1,2,3,4\}$.

We noemen een transversaal van een deelcollectie van $\mathcal{S}$ een <u>partiele transversaal</u> van $\mathcal{S}$. In dit voorbeeld heeft $\mathcal{S}$ meerdere partiële transversalen bijv. $\{1,2,3,6\}$, $\{2,3,6\}$, $\{1,5\}$, $\emptyset$, etc. Iedere deelverzameling van een partiële transversaal is ook een partiële transversaal.

Onder welke voorwaarden heeft een collectie van deelverzamelingen een transversaal? Het verband met het huwelijksprobleem is eenvoudig in te zien. Zij E de verzameling van meisjes en S_k de verzameling van meisjes die bevriend zijn met de jongens j_k $(1 \le k \le n)$: een transversaal wordt dan een verzameling van n meisjes z.d.d. aan iedere jongen één bevriend meisje is toegevoegd.

De stelling van Hall geeft dus een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een transversaal. We zullen nu Hall's stelling in deze vorm formuleren (Het bewijs is een derde bewijs van Stelling 17.2).

18.1 STELLING
Zij E een eindige niet-lege verzameling en $\mathcal{S} = (S_1,\ldots,S_n)$ een collectie van deelverzamelingen van E.
$\mathcal{S}$ heeft een transversaal d.e.s.d. als de vereniging van ieder k-tal der deelverzamelingen S_i tenminste k elementen bevat $(1 \le k \le n)$.

BEWIJS:

Het is duidelijk dat de voorwaarde noodzakelijk is.

Veronderstel dat de voorwaarde vervuld is. Indien ieder der deelverzamelingen S_i precies één element bevat dan moeten de n elementen in $\cup_{i=1}^{n} S_i$ verschillend zijn. Deze n elementen vormen dus een transversaal. Indien een verzameling S_i meer dan één element bevat dan kan, zoals we hieronder zullen aantonen, één der elementen uit S_i weggelaten worden met behoud van de voorwaarde van de stelling. In een eindig aantal stappen kunnen we op deze wijze het aantal elementen in de S_i's tot één reduceren, met behoud van de voorwaarde. Rest ons de geldigheid van de reductie aan te tonen.

Laten we zonder beperking der algemeenheid veronderstellen dat S_1 tenminste twee elementen heeft, zeg x en y, die niet met behoud van de voorwaarde weggelaten kunnen worden. Dan zijn er deelverzamelingen I_1 en I_2 van $\{2,3,\ldots,n\}$ zdd.

(18.2) $$\Big|\bigcup_{i \in I_1} S_i \cup (S_1-\{x\})\Big| \le |I_1|$$

(18.3) $$\Big|\bigcup_{i \in I_2} S_i \cup (S_1-\{y\})\Big| \le |I_2|$$

We zullen nu aantonen dat bovenstaande ongelijkheden tezamen tot een tegenspraak leiden, waaruit dan de geldigheid van de reductie volgt. Het principe van inclusie en exclusie geeft:

$$|I_1| + |I_2| + 1 = |I_1 \cup I_2| + |I_1 \cap I_2| + 1$$

en uit de voorwaarde van de stelling volgt dat

$$|I_1 \cup I_2| + |I_1 \cap I_2| + 1 \le \Big|\bigcup_{i \in I_1 \cup I_2} S_i \cup S_1\Big| + \Big|\bigcup_{i \in I_1 \cap I_2} S_i\Big| =$$

$$\Big|\Big[\bigcup_{i \in I_1} S_i \cup (S_1-\{x\})\Big] \cup \Big[\bigcup_{i \in I_2} S_i \cup (S_1-\{y\})\Big]\Big| + \Big|\bigcup_{i \in I_1 \cap I_2} S_i\Big| \le$$

$$\Big|\bigcup_{i \in I_1} S_i \cup (S_1-\{x\})\Big] + \Big|\bigcup_{i \in I_2} S_i \cup (S_1-\{y\})\Big|.$$

Met (18.2) en (18.3) volgt nu dat de laatste uitdrukking niet groter is dan $|I_1| + |I_2|$, waarmee de tegenspraak afgeleid is. ∎

In de hieronderstaande gevolgen 18.4 en 18.5 nemen we E en S zoals in 18.1.

18.4 GEVOLG:

$\mathcal{S}$ heeft een partiële transversaal met t elementen d.e.s.d. als de vereniging van ieder k-tal der deelverzamelingen S_i tenminste k+t-n elemententen heeft.

BEWIJS:
We passen de stelling 18.1 toe op de collectie van verzamelingen $\mathcal{S}' = (S_1 \cup D, \ldots, S_n \cup D)$, met D een verzameling met (n-t) elementen die disjunct is met E:
$\mathcal{S}$ heeft een partiële transversaal met tenminste t elementen d.e.s.d. als $\mathcal{S}'$ een transversaal heeft. ∎

18.5 GEVOLG:
Zij X een deelverzameling van E. X bevat een partiële transversaal met t elementen d.e.s.d. als voor iedere deelverzameling I van $\{1,\ldots,n\}$ geldt

$$|(\bigcup_{i\in I} S_i) \cap X| \geq |I| + t - n.$$

BEWIJS:
Pas (18.2) toe op de collectie $\mathcal{S}_X = (S_1 \cap X, \ldots, S_n \cap X)$. ∎

Opgave 1
Welke van de volgende stelsels deelverz. van $\{1,2,3,4,5\}$ hebben een transversaal:
(i) $(\{1\},\{2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4,5\})$;
(ii) $(\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\},\{4,5\})$;
(iii) $(\{1,3\},\{2,3\},\{1,2\},\{3\})$;
(iv) $(\{1,3,4\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,5\})$.

Opgave 2
Zij $E = \{1,2,\ldots,n\}$.
Hoeveel verschillende transversalen heeft de collectie van verzamelingen $(\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\})$?

Opgave 3
Zij $E = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathcal{S} = \{a,c,e\},\{e,d\},\{b,d\},\{b,d\})$ en $X = \{a,b,c\}$.
Verifieer de uitspraak van gevolg 18.5 voor t = 2 en t = 3.

19. Toepassingen van de stelling van Hall

We zullen in deze paragraaf twee toepassingen van de stelling van Hall geven. Een (m x n)-latijnse rechthoek is een (m x n)-matrix $M = (m_{ij})$ waarvan de elementen gehele getallen zijn die voldoen aan:

1. $1 \le m_{ij} \le n$;
2. geen enkele rij of kolom heeft twee of meer gelijke elementen.

De voorwaarden 1 en 2 impliceren dat $m \le n$, indien $m = n$ dan spreken we van een latijns vierkant. Een voorbeeld van een (3 x 5)-latijnse rechthoek is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Een voorbeeld van een (5 x 5)-latijns vierkant is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Veronderstel nu dat we een (m x n)-latijnse rechthoek hebben met $m < n$. Wanneer kunnen we deze rechthoek uitbreiden tot een (n x n)-latijns vierkant?

19.1 STELLING

Zij M een (m x n)-Latijnse rechtshoek met $m < n$. Het is mogelijk M tot een (n x n)-latijns vierkant te maken door (n-m) rijen toe te voegen.

BEWIJS:

We bewijzen dat M tot een (m+1 x n)-latijnse rechthoek uit te breiden is. Door de uitbreidingsprocedure (n-m) keer te herhalen, volgt het dan gestelde.

Zij $E = \{1,2,\ldots,n\}$, en $S = (S_1,\ldots,S_n)$, met S_i die elementen van E die niet in de i-de kolom van M voorkomen. Indien S een transversaal heeft, dan kunnen we met de elementen van de transversaal een extra rij vormen zdd. de rechthoek latijns blijft. Om aan te tonen dat S een transversaal heeft, is het voldoende dat ieder k-tal verzamelingen S_i een vereniging met tenminste k elementen heeft. Ieder der S_i's heeft (n-m) elementen. Indien de vereniging minder dan k elementen heeft dan moet één der elementen, zeg x, meer dan (n-m)-maal voorkomen. In ieder der m rijen komt x voor en wel in verschillende kolommen. Er blijven dus precies (n-m) kolommen over waar x niet in voorkomt. x komt dus precies (n-m)-maal voor in de S_i's. Uit deze tegenspraak volgt dat de stelling van Hall toegepast mag worden. ■

Een (0,1)-matrix is een matrix met alle elementen gelijk aan 0 of 1. Een aantal elementen van een (0,1)-matrix noemen we onafhankelijk indien er geen twee of meer in dezelfde rij of kolom liggen.
Als een tweede toepassing geven we in de volgende stelling.

19.2 STELLING (*max-min stelling van König-Egerváry*)
Zij A een (0,1)-matrix met m rijen en n kolommen. Het maximale aantal onafhankelijk énen is gelijk aan het minimale aantal rijen en kolommen die tezamen alle énen bevatten.
BEWIJS:
Het is duidelijk dat het maximale aantal onafhankelijke énen $\leq$ minimale aantal rijen en kolommen die tezamen alle énen bevatten. We zullen hieronder de omgekeerde ongelijkheid bewijzen.
Veronderstel dat een minimaal aantal rijen en kolommen uit a rijen en b kolommen bestaat. Door rijen en kolommen te verwisselen kunnen we bereiken dat het de eerste a rijen en de eerste b kolommen zijn. We kunnen A schrijven als

$$A = \left[\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline G & F \end{array}\right]$$

met F een (m-a) x (n-b) matrix die geen énen bevat,

C een a x b,D een a x (n-b) en G een (m-a) x b matrix.

We zullen nu aantonen dat D een a-tal onafhankelijke énen bevat.
Analoog laat zich bewijzen dat G een b-tal onafhankelijke énen bevat. Daar énen in D en G onafhankelijk zijn, volgt dan de omgekeerde ongelijkheid.
Zij $E = \{1,2,\dots,n-b\}$ en $S_i = \{j \mid d_{ij} = 1\}$, $1 \leq i \leq a$. Indien $S = (S_1,\dots,S_a)$ een transversaal heeft, dan bevat D een a-tal onafhankelijke énen.
Laten we nu veronderstellen dat S geen transversaal bevat. Dan moeten er een k-tal S_i's zijn met een vereniging met $t < k$ elementen. Dit betekent dat de énen in de k corresponderende rijen in t kolommen bevat zijn. Door i.p.v. de k-rijen de t kolommen te gebruiken, vinden we dat het minimale aantal rijen en kolommen echt kleiner is dan a+b. Dit is in tegenspraak met de aanname. ■

Opgave 1
Op hoeveel manieren is de (3 x 5)-Latijnse rechthoek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

uit te breiden tot een latijns vierkant?

Opgave 2

Bewijs dat de stelling van Hall uit de max-min stelling volgt.

Opgave 3

Een bedrijf heeft 9 werknemers. Op zekere dag wil het bedrijf 9 opdrachten uitvoeren die ieder 1 man-dag vergen.
Niet iedere opdracht kan door iedere werknemer worden verricht. Onderstaande tabel geeft de toegelaten combinaties aan.

Job	Werknemers die de job kunnen uitvoeren
1	1,2,6,8
2	5,6
3	1,2,3,4,9
4	2,5,6
5	4,7,8,9
6	2,8
7	1,6
8	2,5,6,8
9	3,7,9

Het bedrijf wil weten of alle 9 opdrachten op die dag uitgevoerd kunnen worden.

a. Bepaal een graaf z.d.d. het bestaan van een volledige koppeling in de graaf correspondeert met het kunnen uitvoeren van alle opdrachten.
b. Toon m.b.v. de stelling van Hall aan dat de opdrachten niet allemaal uitgevoerd kunnen worden.
c. Stel een (0,1)-matrix op z.d.d. het maximum aantal onafhankelijke énen in deze matrix aangeeft of alle opdrachten uitgevoerd kunnen worden.
d. Toon met de max-min stelling van König-Egerváry aan dat niet alle opdrachten uitgevoerd kunnen worden.
e. Hoeveel opdrachten kunnen er op die dag maximaal worden uitgevoerd?

Opgave 4

Zij $G = (V,E)$ een graaf.
$W \subset V$ heet een knooppuntenbedekking als iedere $e \in E$ incident is met tenminste één $w \in W$.
Bewijs dat in een bipartiete graaf het maximum aantal takken in een koppeling gelijk is aan het minimum aantal knooppunten in een knooppuntenbedekking.

Opgave 5

Verifiëer de stelling van König-Egerváry voor de volgende matrices:

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

VI. MATROIDEN

Literatuur

R. von Randow: "Introduction to the theory of matroïds", Springer, 1975.
D.J.A. Welsh : "Matroïd theory", Academic Press, 1976.
R.J. Wilson : "Introduction to graph theory", Longman, 1985.

20. Inleiding

Zij A een (m x n)-matrix met elementen a_{ij} uit een lichaam van getallen (bijv. reële getallen, restklassen modulo p met p een priemgetal). De kolommen van A zijn elementen uit een lineaire vectorruimte over het getallenlichaam.
Zij E de verzameling van de kolomvectoren en B de collectie van maximale stelsels van lineair onafhankelijke kolomvectoren d.w.z. de bases van de lineaire vectorruimte opgespannen door de kolomvectoren.
Uit de lineaire algebra is de volgende eigenschap bekend: indien B_1 en B_2 bases zijn en $e \in B_1$, dan kunnen we een element $f \in B_2$ vinden met de eigenschap dat $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ ook een basis is.

Zij $G = (V,E)$ een samenhangende graaf en laat B de collectie zijn van de voortbrengende bomen van G.
Uit de grafentheorie weten we: indien B_1 en B_2 voortbrengende bomen zijn en $e \in B_1$, dan kunnen we een element $f \in B_2$ vinden met de eigenschap dat $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ ook een voortbrengende boom is.

In beide gevallen zien we dat het paar $(E,\mathcal{B})$ dezelfde eigenschap heeft, deze eigenschap is de definiërende eigenschap van een matroïd.

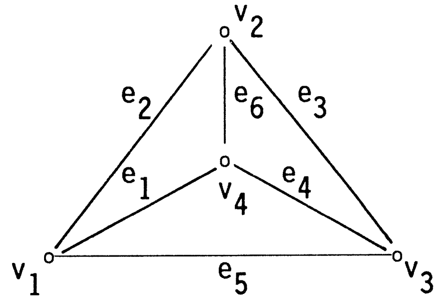
<u>20.1 Definitie I</u>.
Een <u>matroid</u> M is een paar $(E,\mathcal{B})$, met E een niet-lege eindige verzameling en $\mathcal{B}$ een niet-lege collectie van deelverzamelingen van E, die we <u>bases</u> zullen noemen, zdd. aan de volgende voorwaarden voldaan is:
(i) geen basis bevat een andere basis;
(ii) voor $B_1,B_2 \in \mathcal{B}$ en $e \in B_1$ is er een $f \in B_2$ z.d.d. $(B_1-\{e\})\cup\{f\} \in \mathcal{B}$.

De eigenschap (ii) heet de <u>basisuitwisseleigenschap</u>. Door de basisuitwisseleigenschap herhaald toe te passen volgt dat alle bases evenveel elementen bevatten. Dit aantal is de <u>rang</u> van de matroïd.

20.2 Voorbeeld. Zij E de verzameling van de zes kolomvectoren, met elementen uit het lichaam van de gehele getallen module 2, gegeven door:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1

De kolomvectoren e_1,e_2,e_3,e_4 zijn lineair afhankelijk, immers $e_1+e_2+e_3+e_4$ is modulo 2 gerekend de nulvector. Iedere basis bestaat uit 3 vectoren. Er zijn 16 bases, nl:
$\{e_1,e_2,e_3\}$, $\{e_1,e_2,e_4\}$, $\{e_1,e_2,e_5\}$, $\{e_1,e_3,e_4\}$, $\{e_1,e_3,e_5\}$, $\{e_1,e_3,e_6\}$, $\{e_1,e_4,e_6\}$, $\{e_1,e_5,e_6\}$, $\{e_2,e_3,e_4\}$, $\{e_2,e_3,e_6\}$, $\{e_2,e_4,e_5\}$, $\{e_2,e_4,e_6\}$, $\{e_2,e_5,e_6\}$, $\{e_3,e_4,e_5\}$, $\{e_3,e_5,e_6\}$, $\{e_4,e_5,e_6\}$.
We noemen een matroïd die behoort bij kolomvectoren een vector-matroid.
Beschouw vervolgens de hieronder getekende graaf G.



De 16 bases van de vector-matroïd uit dit voorbeeld zijn precies alle voortbrengende bomen van G. Een matroïd waarvan de bases de voortbrengende bomen van een graaf zijn heet een graaf-matroid. De matroïd uit dit voorbeeld is dus zowel een vector-matroïd als een graaf-matroïd.

Indien we te maken hebben met vectoren, dan is het begrip onafhankelijk bekend uit de lineaire algebra. Dit begrip kunnen we ook van toepassing laten zijn op een willekeurige matroïd. We kunnen er zelfs een matroïd mee definiëren.

20.3 Definitie II.
Een matroïd M is een paar $(E,\mathcal{I})$, met E een niet-lege eindige verzameling en $\mathcal{I}$ een niet-lege collectie van deelverzamelingen van E, die we onafhankelijke verzamelingen zullen noemen, zdd. aan de volgende voorwaarden voldaan is:
(i) iedere deelverzameling van een onafhankelijke verzameling is onafhankelijk;
(ii) als $I,J \in \mathcal{I}$, $|I| = k$ en $|J| = k + 1$, dan is er een $e \in J\backslash I$ zdd. $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

De eigenschap (ii) heet de uitbreidingseigenschap. Een deelverzameling die niet onafhankelijk is noemen we afhankelijk.

Uit de lineaire algebra is ook bekend wat we onder $\rho(A)$, de rang van de kolommen van een matrix A verstaan: het maximum aantal onafhankelijke kolommen in A. Ook met dit begrip is een matroïd te definiëren.

20.4 Definitie III.

Een matroïd M is een paar (E,ρ), met E een niet-lege eindige verzameling en ρ een functie die aan de deelverzamelingen van E een niet-negatief geheel getal toevoegd (ρ heet de rangfunctie), zdd. aan de volgende voorwaarden is voldaan:

(i) $0 \leq \rho(A) \leq |A|$ voor iedere $A \subseteq E$;

(ii) indien $A \subseteq B \subseteq E$, dan geldt $\rho(A) \leq \rho(B)$;

(iii) $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ voor alle $A,B \subseteq E$.

De eigenschap (iii) heet submodulariteit.

Uit de grafentheorie weten we dat door het toevoegen van een tak aan een voortbrengende boom een kring ontstaat. Ook het begrip kring is uit te breiden naar een willekeurige matroïd en kan worden gebruikt om een matroïd mee te definieren.

20.5 Definitie IV.

Een matroïd M is een paar $(E,\mathcal{C})$, met E een niet-lege eindige verzameling en $\mathcal{C}$ een collectie van deelverzamelingen van E, die we kringen noemen, zdd. aan de volgende voorwaarden is voldaan:

(i) de lege verzameling is geen kring;

(ii) geen enkele echte deelverzameling van een kring is een kring;

(iii) als $e \in C_1 \cap C_2$ en C_1,C_2 zijn verschillende kringen, dan is er een kring C_3 zdd. $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - \{e\}$.

Eigenschap (iii) heet de doorsnede-eigenschap.

We zullen nu allereerst laten zien dat de vier definities hetzelfde inhouden, d.w.z. dat ze het begrip matroïd definiëren.

20.6 STELLING

De definities 20.1, 20.3, 20.4 en 10.5 zijn equivalent.

BEWIJS:

$\underline{20.1} \to \underline{20.3}$: Neem $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid \exists\, B \in \mathcal{B}$ met $I \subseteq B\}$.
Met deze definities van de onafhankelijke verzamelingen $\mathcal{I}$ is het duidelijk dat een deelverzameling van een onafhankelijke verzameling weer onafhankelijk is.
Laten $I,J \in \mathcal{I}$ met $I \subseteq B_1$, $J \subseteq B_2$ en $|I| = |J| - 1$. Door het herhaald toepassen van de basisuitwisseleigenschap kunnen de elementen van $B_1\backslash I$ worden uitgewisseld tegen elementen van B_2.
Omdat $|B_1| = |B_2|$ en $|I| = |J| - 1$, bevat de verzameling van de elementen van B_2 die zijn uitgewisseld minsten één element van J. I tezamen met dit element e van J is bevat in een basis, zeg B_3. Maar dit impliceert dat $e \in J\backslash I$ en $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.
$\underline{20.3} \to \underline{20.4}$: Neem $\rho(A) = \max\{\, |I| \mid I \subseteq A, I \in \mathcal{I}\,\}$.
Met deze definitie van de rangfunctie is het direct duidelijk dat aan (i) en (ii) in definitie 20.4 is voldaan. Indien $\rho(A) = |I|$ met $I \subseteq A$ en $I \in \mathcal{I}$, dan heet I een basis van A. Zij X een basis voor $A \cap B$. Op grond van de uitbreidingseigenschap kan X worden uitgebried tot een basis Y voor A, waarna Y wordt uitgebreid tot een basis Z voor $A \cup B$.
Daar $X \cup (Z\backslash Y)$ een onafhankelijke deelverzameling van B is, volgt nu:

$$\rho(B) \geq \rho(X \cup (Z\backslash Y) = |X| + |Z| - |Y| = \rho\,(A \cap B) + \rho\,(A \cup B) - \rho(A),$$

waarmee eigenschap (iii) is aangetoond.
$\underline{20.4} \to \underline{20.5}$: Neem $\mathcal{C} = \{C \subseteq E \mid \rho(C) = |C| - 1; \rho(C\backslash\{e\}) = |C| - 1\ \forall e \in C\}$.
Het is duidelijk dat aan (i) is voldaan. Voor (ii) geldt:
Neem $C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \subset C_2$ en $C_1 \neq C_2$. Laat $e \in C_2\backslash C_1$. Dan:

$$|C_2| -1 = \rho(C_2\backslash\{e\}) = \rho(C_1 \cup [C_2\backslash(\{e\} \cup C_1)]) \leq \rho(C_1) + \rho(C_2\backslash(\{e\} \cup C_1))$$
$$\leq \rho(C_1) + |C_2| - |C_1| - 1$$

Dus $\rho(C_1) \geq |C_1|$, d.w.z. $C_1 \notin \mathcal{C}$.
Tenslotte bewijzen we eigenschap (iii).
Neem $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ in $e \in C_1 \cap C_2$.
Analoog aan (ii) is aan te tonen dat $\rho(C_1 \cap C_2) = |C_1 \cap C_2|$. We kunnen nu schrijven:

$$\rho(C_1 \cup C_2) + |C_1 \cap C_2| = \rho(C_1 \cup C_2) + \rho(C_1 \cap C_2) \leq \rho(C_1) + \rho(C_2) = |C_1| + |C_2| - 2$$

Laat $C' = C_1 \cup C_2 - \{e\}$, dan geldt:

$$\rho(C') \leq \rho(C_1 \cup C_2) \leq |C_1| + |C_2| - |C_1 \cap C_2| - 2 = |C_1 \cup C_2| - 2 = |C'| - 1,$$

dus C′ bevat een kring.
$\underline{20.5} \to \underline{20.1}$: Neem $\mathcal{B} = \{B \subseteq E \mid B$ bevat geen kring en is maximaal$\}$.
Uit de definitie van B volgt direct dat aan (i) is voldaan.
Neem $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en kies $e \in B_1$. Breid $B_1 - \{e\}$ met elementen van B_2 uit tot een maximale verzameling ontstaat die geen kring bevat, zeg B_3.

Veronderstel dat $|B_3| < |B_2|$. Neem $f \in B_2 \backslash B_3$. Omdat $B_3 \cup \{f\}$ een kring bevat, zeg C_1, en B_2 geen kring bevat, is er een $g \in C_1 \cap (B_3 \backslash B_2)$.
Nu geldt dat $(B_3 - \{g\}) \cup \{f\}$ ook geen kring bevat (anders $f \in C_1 \cap C_2$, zodat $B_3 \supseteq (C_1 \cup C_2 - \{f\})$ bevat kring).
Op deze wijze is $B_3 \backslash B_2$ door elementen van $B_2 \backslash B_3$ te vervangen zonder dat de eigenschap "geen kring bevatten" verloren gaat. Ook de eigenschap "maximaal" gaat niet verloren, immers:

Stel $(B_3 - \{g\}) \cup \{f\} \cup \{h\}$ bevat geen kring voor zekere $h \in B_2$.
Dan bevat $B_3 \cup \{h\}$ ook geen kring (anders $g \in C_1 \cap C_3$, zodat $(B_3 - \{g\}) \cup \{f\} \cup \{h\} \supseteq (C_1 \cup C_3 - \{g\})$ bevat kring).

Aldus krijgen we een verzameling die geen kring bevat, maximaal is en echte deelverzameling van B_2 is: tegenspraak, d.w.z. $|B_3| \geq |B_2|$.
Op analoge wijze is aan te tonen dat $|B_2| \geq |B_3|$. Hieruit volgt dat $|B_2| = |B_3|$, d.w.z. er is een $f \in B_2$ zdd. $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\} \in \mathscr{B}$. ■

<u>20.7 Definitie</u>. Onder het <u>span</u> van een verzameling A verstaan we de verzameling $sp(A) := A \cup \{e \in E \mid \rho(A \cup \{e\}) = \rho(A)\}$.

20.8 STELLING

De volgende eigenschappen gelden:

(i) $\rho(sp(A)) = \rho(A)$;

(ii) als $A_1 \subseteq A_2$, dan $sp(A_1) \subseteq sp(A_2)$;

(iii) als $e \in E \backslash A$, dan : $e \in sp(A)$ d.e.s.d. als er een $C \in \mathscr{C}$ is zdd. $e \in C \subseteq A \cup \{e\}$;

(iv) $B \in \mathscr{B}$ d.e.s.d. als $B \in \mathscr{I}$ en $sp(B) = E$.

BEWIJS:

(i) Stel $\rho(sp(A)) > \rho(A)$, dan bevat $sp(A)$ een onafhankelijke deelverzameling met meer elementen dan de grootste onafhankelijke verzameling in A. Er is dus een $e \in sp(A) \backslash A$ z.d.d. $\rho(A \cup \{e\}) > \rho(A)$: tegenspraak.

(ii) Stel $e \in sp(A_1)$, d.w.z. $\rho(A_1 \cup \{e\}) = \rho(A_1)$. Uit de submodulariteit van ρ volgt:

$$\rho(A_2) + \rho(A_1 \cup \{e\}) \geq \rho(A_2 \cup \{e\}) + \rho(A_2 \cap (A_1 \cup \{e\})) \geq \rho(A_2 \cup \{e\}) + \rho(A_1),$$

d.w.z. $\rho(A_2) \geq \rho(A_2 \cup \{e\})$, ofwel: $\rho(A_2) = \rho(A_2 \cup \{e\})$, d.w.z. $e \in sp(A_2)$.

(iii) $\Rightarrow$ Neem een deelverzameling I van A die onafhankelijk is en $\rho(A)$ elementen bevat. $\rho(I \cup \{e\}) = \rho(I) = \rho(A)$, d.w.z. er is kring C in $I \cup \{e\}$ die e bevat.

$\Leftarrow$ Uit $\rho(C) = |C|-1$ en $\rho(C\backslash\{e\}) = |C|-1$ volgt dat het toevoegen van e aan $C\backslash\{e\}$ het aantal onafhankelijke elementen in A niet vergroot. $\{e\}$ kan dus ook aan A worden toegevoegd, zonder dat het aantal onafhankelijke elementen toeneemt: $e \in sp(A)$.

(iv) $\Rightarrow$ $\rho(B\cup\{e\}) = \rho(B)$ voor iedere e, dus $sp(B) = E$.

$\Leftarrow$ Stel $B \notin \mathcal{B}$, dan kan er nog een element aan B worden toegevoegd zonder dat de onafhankelijkheid verloren gaat: tegenspraak. ■

Bij iedere matroïd kunnen we een <u>duale matroid</u> definiëren. We doen dit met de rangfunctie ρ: de duale matroïd M^* van een matroïd $M = (E,\rho)$ wordt gegeven door het paar $M^* = (E,\rho^*)$ met

$$\rho^*(A) = |A| + \rho(E\backslash A) - \rho(E).$$

In de volgende stelling wordt aangetoond dat $M^* = (E,\rho^*)$ een matroïd is.

20.9 STELLING

$M^* = (E,\rho^*)$ is een matroïd.

BEWIJS:

We zullen laten zien dat ρ^* aan de drie voorwaarden van definitie 20.4 voldoet.

(i) Omdat $E\backslash A \subseteq E$, is $\rho(E\backslash A) \le \rho(E)$, wat impliceert dat $\rho^*(A) \le |A|$.

Verder geldt:

$$\rho(E\backslash A) + |A| \ge \rho(E\backslash A) + \rho(A) \ge \rho[(E\backslash A) \cup A] + \rho[(E\backslash A) \cap A]$$
$$= \rho(E) - \rho(\varnothing) = \rho(E).$$

Hieruit volgt: $\rho^*(A) = |A| + \rho(E\backslash A) - \rho(E) \ge 0$.

(ii) Stel $A_1 \subseteq A_2$. Laat $A_3 = A_2\backslash A_1$ en $A_4 = E\backslash A_2$. We kunnen nu schrijven:

$$\rho^*(A_2) = |A_2| + \rho(E\backslash A_2) - \rho(E) = |A_1| + |A_3| + \rho(A_4) - \rho(E)$$
$$= \rho^*(A_1)+|A_3|+\rho(A_4)-\rho(E\backslash A_1)$$
$$\ge \rho^*(A_1)+\rho(A_3)+\rho(A_4)-\rho(A_3\cup A_4)-\rho(A_3\cap A_4) \ge \rho^*(A_1).$$

(iii) Neem $A_1,A_2 \subseteq E$. Laat $A_3=A_1\backslash A_2$, $A_4=A_1\cap A_2$, $A_5=A_2\backslash A_1$ en $A_6=E\backslash(A_1\cup A_2)$.

Dan geldt:

$$\rho^*(A_1\cup A_2) + \rho^*(A_1\cap A_2) = |A_1\cup A_2| + |A_1\cap A_2| + \rho(A_6) + \rho(A_3\cup A_5\cup A_6)-2\rho(E)$$
$$= |A_3| + 2|A_4| + |A_5| + \rho(A_6) + \rho(A_3\cup A_5\cup A_6) - 2\rho(E)$$
$$= \rho^*(A_1) + \rho^*(A_2) + \underbrace{\rho(A_6) + \rho(A_3\cup A_5\cup A_6) - \rho(A_5\cup A_6) - \rho(A_3\cup A_6)}_{\text{pas hierop 20.4(iii) toe met } A=A_5\cup A_6 \text{ en } B=A_3\cup A_6}$$
$$\le \rho^*(A_1)+\rho^*(A_2).$$

■

De definitie van de duale matroïd M^* is niet erg doorzichtig. De duale matroïd wordt duidelijker als we de bases van M^* beschouwen.

20.10 STELLING

De bases van M^* zijn de complementaire verzamelingen van de bases van M: $\mathscr{B}^* = \{B^* \subseteq E \mid E\backslash B^*$ is een basis van M$\}$.

BEWIJS:

Laat B een basis zijn in M en beschouw $B^* = E\backslash B$. Dan geldt:

$$\rho^*(B^*) = |E\backslash B| + \rho(B) - \rho(E) = |E\backslash B| = |B^*|,$$

dus B^* is onafhankelijk in M^*.

$\rho^*(E) = |E| + \rho(\emptyset) - \rho(E) = |E| - \rho(B) = |E\backslash B| = |B^*|$, waaruit m.b.v. stelling 20.8 (iv) volgt dat B^* een basis is van M^*.

Op analoge wijze kunnen we aantonen dat als B^* een basis is van M^*, dan is $B = E\backslash B^*$ een basis van M. ■

20.11 GEVOLG:

De duale matroïd van de duale matroïd is oorspronkelijke matroïd.

We voeren nog enkele definities in die betrekking hebben op eigenschappen tussen de oorspronkelijke matroïd M en de duale matroïd M^*.

<u>20.12 Definities</u>

(i) Een functie ρ^*: {deelverzamelingen van E} $\rightarrow$ {0,1,...} heet <u>corangfunctie</u> op M als ρ^* een rangfunctie is op M^*.

(ii) $B^* \subseteq E$ heet een <u>cobasis</u> van M als B^* een basis is van M^*.

(iii) $C^* \subseteq E$ heet een <u>cokring</u> van M als C^* een kring is van M^*.

(iv) $I^* \subseteq E$ heet <u>co-onafhankelijk</u> in M als I^* onafhankelijk is in M^*.

In onderstaande stelling staan enkele eigenschappen van deze begrippen opgesomd.

20.13 STELLING

(i) De corangfunctie van de corangfunctie is de oorspronkelijke rangfunctie;

(ii) C^* is een cokring van M d.e.s.d. als $sp(E\backslash C^*) = E\backslash C^*$ en $\rho(E\backslash C^*) = \rho(E)-1$

(iii) I^* is co-onafhankelijk in M d.e.s.d. als $sp(E\backslash I^*) = E$;

(iv) Iedere basis van M heeft een niet-lege doorsnede met iedere cokring van M;

(v) Iedere cobasis van M heeft een niet-lege doorsnede met iedere kring van M.

BEWIJS:

(i) $(\rho^*)^*(A) = |A| + \rho^*(E\setminus A) - \rho^*(E)$

$= |A| + |E\setminus A| + \rho(A) - \rho(E) - |E| - \rho(\emptyset) + \rho(E) = \rho(A).$

(ii) $|C^*| - 1 = \rho^*(C^*) = |C^*| + \rho(E\setminus C) - \rho(E)$, dus $\rho(E\setminus C^*) = \rho(E) - 1$.

Neem een $e \in C^*$, dan geldt:

$\rho^*(C^*-\{e\}) = |C^*| - 1 + \rho[(E\setminus C^*)\cup\{e\}] - \rho(E)$, d.w.z.

$\rho[(E\setminus C^*)\cup\{e\}] = \rho(E) = \rho(E\setminus C^*) + 1$. Hieruit volgt: $sp(E\setminus C^*) = E\setminus C^*$.

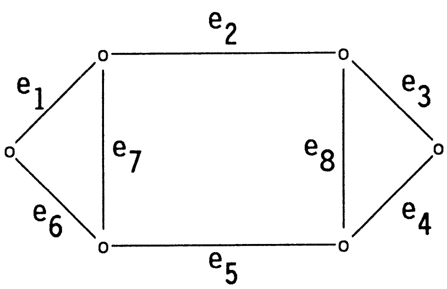
Dit bewijs de andere kant op gaat geheel analoog.

(iii) $I^* \in \mathcal{I}^* \Leftrightarrow \rho^*(I^*) = |I^*| \Leftrightarrow \rho(E\setminus I^*) = \rho(E) \Leftrightarrow sp(E/I^*) = E$.

(iv) Stel $B \in \mathcal{B}$, $C^* \in \mathcal{C}$ en $B \cap C^* = \emptyset$. Dan is C^* bevat in $B^* = E\setminus B \in \mathcal{B}^*$: tegenspraak.

(v) Stel $B^* \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ en $B^* \cap C = \emptyset$. Dan is C bevat in $B = E\setminus B^* \in \mathcal{B}$: tegenspraak. ■

20.14 Voorbeeld. Beschouw de graaf-matroïd van de hieronder getekende graaf.



(i) Een voorbeeld van een cobasis is $\{e_6,e_7,e_8\}$, omdat het complement een voortbrengende boom, nl. $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$.

(ii) $\{e_2,e_5\}$ is een cokring, omdat het complement $\{e_1,e_3,e_4,e_6,e_7,e_8\}$ twee componenten heeft, waaraan geen enkele tak kan worden toegevoegd zonder dat daardoor de graaf samenhangend wordt, d.w.z. $sp(\{e_1,e_3,e_4,e_6,e_7,e_8\}) = \{e_1,e_3,e_4,e_6,e_7,e_8\}$, en bovendien $\rho(\{e_1,e_3,e_4,e_6,e_7,e_8\}) = 4 = \rho(E)-1$.

(iii) $\{e_6,e_7\}$ is co-onafhankelijk, omdat het complement $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_8\}$ nog samenhangend is, d.w.z. $span(\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_8\}) = E$.

Opgave 1

Zij $(E,\mathcal{I})$ een matroïd. Laat $I,J \in \mathcal{I}$ met $|I| < |J|$.
Bewijs dat er een $K \subset J \backslash I$ bestaat z.d.d. $I \cup K \in \mathcal{I}$ en $|I \cup K| = |J|$.

Opgave 2

Zij $(E,\mathcal{I})$ een matroïd.
Als I een onafhankelijke verzameling is en $I \cup \{e\}$ een afhankelijke verzameling is, dan bevat $I \cup \{e\}$ precies één kring. Bewijs deze bewering.

Opgave 3

Zij M een matroïd. Toon het volgende aan:
M bevat geen kringen d.e.s.d. E is de enige basis van M.

Opgave 4

Zij $M = (E,\rho)$ een matroïd, en laat $A \subseteq B \subseteq E$.
Toon aan dat: $\rho(B) \le \rho(A) + \rho(B\backslash A)$.

Opgave 5

Zij M een matroïd met duale matroïd M^*. Laten A_1 en A_2 disjuncte deelverzamelingen van E zijn zdd. A_1 onafhankelijk is in M en A_2 onafhankelijk in M^*.
Toon aan dat er een basis B_1 van M en een basis B_1^* van M^* bestaat zdd. $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_1^*$ en $B_1 \cap B_1^* = \emptyset$.

Opgave 6

Zij $M = (E,\mathcal{I})$ een matroïd. Laat I een niet-lege onafhankelijke verzameling zijn. Toon het volgende aan:

a. Er bestaat een cokring C_1^* zdd. $|C_1^* \cap I| = 1$.
b. Als $|I| < \rho(E)$, dan bestaat er een cokring C_2^* zdd. $|C_2^* \cap I| = 0$.

Opgave 7

Zij M een matroïd met duale matroïd M^*. Laat C^* een kring in M^* zijn.
Toon aan dat er voor iedere $e \in C^*$ een basis B van M is zdd. $B \subseteq (E\backslash C^*)\cup\{e\}$.

Opgave 8

Zij $M = (E,\mathcal{C})$ een matroïd. Toon aan:

$C \in \mathcal{C} \iff |C| \geq 1$, $|C \cap C^*| \neq 1$ voor alle $C^* \in \mathcal{C}^*$ en C is minimaal t.o.v. deze eigenschappen.

Opgave 9

Zij $M = (E,\mathcal{C})$ een matroïd. Laat $C_1,C_2 \in C$ en $x \in C_1 \cap C_2$.

Toon het volgende aan:

Voor iedere $y \in C_1 \backslash C_2$ is er een $C \in \mathcal{C}$ zdd. $y \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}$.

Opgave 10

Zij $M = (E,\mathcal{C})$ een matroïd. Verdeel de elementen van E in R,S,T met $|T| = 1$.

Dan is er: òf een $C \in \mathcal{C}$ met $T \subseteq C$ en $C \cap S = \emptyset$

òf een $C^* \in \mathcal{C}^*$ met $T \subseteq C^*$ en $C^* \cap R = \emptyset$.

Toon deze bewering aan.

21. Voorbeelden van matroiden

21.1 Triviale matroid.

Neem als enige onafhankelijke verzameling de lege verzameling. Ga zelf na dat de bijbehorende structuur inderdaad een matroïd is. Het is eenvoudig in te zien dat:

$\mathcal{B} = \{\emptyset\}$; $\mathcal{I} = \{\emptyset\}$; $\mathcal{C} = \{C \subseteq E \mid |C|=1\}$; $\rho(A) = 0$ voor alle $A \subseteq E$;

$\mathcal{B}^* = \{E\}$; $\mathcal{I}^* = \{\text{alle deelverzamelingen}\}$; $\mathcal{C}^* = \emptyset$; $\rho^*(A) = |A|$ voor alle $A \subseteq E$.

21.2 Discrete matroid.

Dit is de duale matroïd van de triviale matroïd. Iedere deelverzameling van E (en ook E zelf) is onafhankelijk. In dit geval krijgen we:

$\mathcal{B} = \{E\}$; $\mathcal{I} = \{\text{alle deelverzamelingen}\}$; $\mathcal{C} = \emptyset$; $\rho(A) = |A|$ voor alle $A \subseteq E$

$\mathcal{B}^* = \{\emptyset\}$; $\mathcal{I}^* = \{\emptyset\}$; $\mathcal{C}^* = \{C^* \subseteq E \mid |C^*| = 1\}$; $\rho^*(A) = 0$ voor alle $A \subseteq E$.

21.3 Uniforme matroiden.

Nemen we als bases alle deelverzamelingen van E met precies k elementen, dan hebben we een <u>k-uniforme matroid</u>. Ga zelf weer na dat op deze wijze inderdaad een matroïd is gedefiniëerd. De triviale matroïd is 0-uniform en de discrete matroïd $|E|$-uniform.

Voor de k-uniforme matroïd geldt (veronderstel $1 \leq k < m = |E|$):

$\mathcal{B} = \{B \subseteq E \mid |B| = k\}$; $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid |I| \leq k\}$; $\mathcal{C} = \{C \subseteq E \mid |C| = k+1\}$;

$\rho(A) = \min(|A|,k)$ voor alle $A \subseteq E$; $\mathcal{B}^* = \{B^* \subseteq E \mid |B^*| = m-k\}$;

$\mathcal{I}^* = \{I^* \subseteq E \mid |I^*| \leq m-k\}$; $\mathcal{C}^* = \{C^* \subseteq E \mid |C^*| = m-k+1\}$;

$\rho^*(A) = \min(|A|,m-k)$.

De duale matroïd van de k-uniforme matroïd is de (m-k)-uniforme matroïd.

21.4 Vector matroid.

Zij E de verzameling van vectoren over een getallenlichaam. $A \subseteq E$ heet onafhankelijk als de vectoren van A lineair onafhankelijk zijn. Een basis voor deze matroïd komt dan overeen met het begrip basis uit de lineaire algebra. De rang van een verzameling A komt overeen met de rang van de bijbehorende matrix, waarvan de kolommen de vectoren van A zijn. Voor de begrippen kring en duale matroïd zijn in het algemeen geen termen uit de lineaire algebra te geven. Indien het getallenlichaam de gehele getallen modulo 2 is, d.w.z. iedere component is 0 of 1, dan heet de vector matroïd een <u>binaire matroid</u>.

Met behulp van bekende resultaten uit de lineaire algebra is aan te tonen dat het hier gedefiniëerde inderdaad een matroïd is.

21.5 Graaf matroid.

Bij een samenhangende graaf $G = (V,E)$ met $|V| = n$ en $|E| = m$ kunnen we definiëren de <u>incidentiematrix</u> $A = (a_{ij})$: een nxm-matrix met

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als knooppunt } v_i \text{ een eindpunt is van de tak } e_j \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Nemen we de binaire matroïd die behoort bij de verzameling van kolomvectoren van A, dan noemen we deze matroïd de graaf-matroïd van G, genoteerd met M(G). We kunnen deze matroïd ook introduceren met behulp van begrippen uit de grafentheorie. Kringen van de matroïd zijn dan enkelvoudige kringen in de graaf. Met behulp van definitie 20.5 is eenvoudig in te zien dat we aldus een matroïd krijgen. Een basis komt overeen met een voortbrengend bos.

In dit geval krijgen we:

$\mathcal{B}$ = {voorbrengende bomen} ; $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid I$ bevat geen kringen$\}$;

$\mathcal{C}$ = {enkelvoudige kringen} .

Voor de rangfunctie is geen specifiek begrip in termen van de grafentheorie. In de volgende paragraaf komen we nog terug op deze matroïd en gaan we ook nader in op de duale matroïd ervan.

21.6 Cograaf matroid.

Uitgaande van de takken van de graaf is de graaf matroïd M(G) niet de enige matroïd die we kunnen definiëren. We krijgen ook een matroïd als we voor de afhankelijke verzamelingen de sneden nemen (voor het bewijs dat dit inderdaad een matroïd is: zie volgende paragraaf). De kringen van de matroïd, d.w.z. de minimale afhankelijke verzamelingen, zijn dus de minimale sneden van de graaf. Een dergelijke matroïd heet cograaf matroïd, genoteerd met $M^*(G)$, waarvoor geldt:

$\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid I$ bevat geen sneden$\}$; $\mathcal{C}$ = {minimale sneden}.

Ook op deze matroïd komen we in de volgende paragraaf terug.

21.7 Koppelingsmatroid.

Er is nog een derde matroïd die verbonden is aan een graaf. In dat geval nemen we voor E een deelverzameling W van de knooppunten van de graaf. Een verzameling $I \subseteq W$ noemen we onafhankelijk als er een <u>koppeling</u> M bestaat zdd. ieder knooppunt van I incident is met een tak van de koppeling. In dat geval heet een knooppunt <u>gebonden</u> door de koppeling.

We zullen nu laten zien dat dit inderdaad een matroïd oplevert m.b.v. definitie 20.3 (aan voorwaarde (i) is op triviale wijze voldaan).
Veronderstel dat I_1 en I_2 twee onafhankelijke verzamelingen zijn met $|I_1| = k$ en $|I_2| = k+1$, gebonden door de koppelingen M_1 resp. M_2. We mogen wel aannemen dat voor iedere $v \in I_2 \backslash I_1$ v niet gebonden wordt door M_1 (anders bindt M_1 ook $I_1 \cup \{v\}$ voor zekere $v \in I_2 \backslash I_1$ en is aan 20.3 (ii) voldaan). Beschouw de deelgraaf van G bestaande uit de takken die òf tot M_1 òf tot M_2 behoren. Iedere component van deze deelgraaf is òf een kring òf een keten waarvan de takken afwisselend tot M_1 en M_2 behoren.
Laat alle kringen weg (deze hebben evenveel knooppunten van I_1 als van I_2).
Neem een $v \in I_2 \backslash I_1$, dan is v het beginpunt van een keten waarvan de eerste tak tot M_2 behoort. Veronderstel dat de keten eindigt in I_1, d.w.z. in $I_1 \backslash I_2$ want anders is nog een tak van M_2 toe te voegen.
Geen enkel tussenpunt zit in $I_2 \backslash I_1$, want anders loopt de tak van M_1 tussen een knooppunt van I_1 en een van $I_2 \backslash I_1$, wat is uitgesloten. Omdat $|I_2| > |I_1|$ is er een keten die begint in een $v \in I_2 \backslash I_1$, en eindigt buiten I_1.
Construeer M_3 door op deze keten de takken van M_2 te nemen en er buiten de takken van M_1. M_3 is weer een koppeling en M_3 bindt $I_1 \cup \{v\}$.
Hiermee is aangetoond dat de bijbehorende structuur die van een matroïd is met

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq W \mid I \text{ gebonden door koppeling } M\};$$
$$\mathcal{B} = \{B \subseteq W \mid B \text{ gebonden door een maximale koppeling}\} .$$

21.8 Transversaal matroid.

Zij E een niet-lege verzameling en $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ een stelsel van niet-lege deelverzamelingen van E.
$I \subseteq E$ noemen we onafhankelijk als I een partiële transversaal is.
Construeer de bijbehorende bipartiete graaf (zie de paragrafen 17 en 19) Het is eenvoudig in te zien dat er een één-één-duidig verband is tussen de koppelingen in deze graaf en de partiële transversaal. Uit 21.7 volgt dat het hierboven gedefiniëerde begrip inderdaad een matroïd genereert. Deze noemen we de transversaal matroïd, waarvoor geldt:

$$\mathcal{I} = \{I \subseteq E \mid I \text{ is een partiële transversaal}\} .$$

Twee matroïden $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ en $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ heten <u>isomorf</u> als er een één-ééndduidige correspondentie ϕ van E_1 op E_2 is zdd.

$$I_1 \in \mathcal{I}_1 \rightarrow \phi(I_1) \in \mathcal{I}_2 \text{ en } I_2 \in \mathcal{I}_2 \rightarrow \phi^{-1}(I_2) \in \mathcal{I}_1.$$

Een matroïd die isomorf is met een vectormatroïd noemen we eveneens een vectormatroïd; hetzelfde geldt voor de andere voorbeelden van matroïden.

21.9 Voorbeeld.

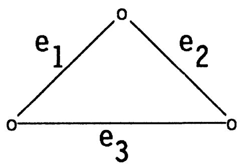
Laat $E = \{1,2,3\}$, $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ en beschouw $M = (E,\mathcal{B})$.

(i) M is een 2-uniforme matroïd: volgt rechtstreeks uit de definitie;

(ii) M is een binaire matroïd:

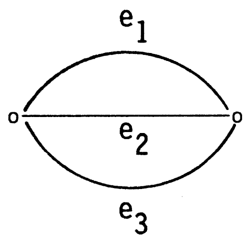
Neem $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dan is eenvoudig in te zien dat de hierbij behorende matroïd isomorf is met M.

(iii) M is een graaf matroïd:

Neem G: 

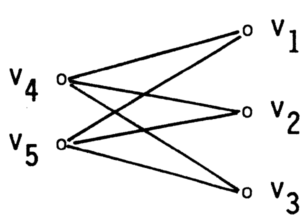
, dan is eenvoudig in te zien dat de bijbehorende graaf matroïd isomorf is met M, nl. $\mathcal{C} = \{\{e_1,e_2,e_3\}\}$.

(iv) M is een cograaf matroïd:

Neem G: 

, dan is het eveneens eenvoudig in te zien dat de bijbehorende cograaf matroïd isomorf is met M, nl. $\{e_1,e_2,e_3\}$ is de enige minimale snede.

(v) M is een koppelingsmatroïd:

Neem G: 

met $W = \{v_1,v_2,v_3\}$.

Ook nu is weer in te zien dat de bijbehorende koppelingsmatroïd isomorf is met M door op te merken dat $\{v_1,v_2,v_3\}$ de enige kring is.

(vi) M is een transversaal matroïd:

Neem $\mathcal{S} = (S_1,S_2)$ met $S_1 = S_2 = E$. De enige deelverzameling van E die geen partiële transversaal is is $\{1,2,3\}$, waaruit de isomorfie volgt.

Opgave 1

Bewijs dat de 2-uniforme matroïd met $E = \{1,2,3,4\}$ geen graaf-matroïd is.

Opgave 2

Toon aan dat iedere uniforme matroïd een transversaal matroïd is.

Opgave 3

Construeer een voorbeeld dat aantoont dat twee niet-isomorfe grafen dezelfde graaf matroïd kunnen hebben (neem $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$).

Opgave 4

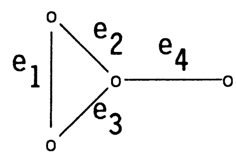
a. Bewijs dat er precies 8 niet-isomorfe matroïden zijn op $E = \{1,2,3\}$.

b. Bewijs dat er hoogstens 2^{2^n} niet-isomorfe matroïden zijn op $E = \{1,2,\dots,n\}$

c. Bewijs dat er hoogstens 2^{n^2} niet-isomorfe transversaal matroïden zijn op $E = \{1,2,\dots,n\}$.

Opgave 5

Beschouw de hiernaast getekende graaf G.
Zijn M(G) en $M^*(G)$ transversaal matroïden ?



Opgave 6

a. Bepaal de cograaf matroïd $M^*(K_4)$ van de volledige 4-graaf.

b. Toon aan dat $M(K_4)$ en $M^*(K_4)$ isomorf zijn.

22. Grafen en matroiden

In deze paragraaf willen we het verband tussen enerzijds de graaf en de duale graaf en anderzijds de graaf-matroïd en de cograaf-matroïd nader bestuderen. Bij het bestuderen van grafen vonden we een sterke analogie tussen eigenschappen van enkelvoudige kringen en minimale sneden (bijvoorbeeld stelling 5.5). De achtergrond van deze analogie ligt in de volgende stelling.

22.1 STELLING

De cograafmatroïd is de duale matroïd van de graaf matroïd.

BEWIJS:

Daar de kringen van $M^*(G)$ de minimale sneden van G zijn, moeten we aantonen dat een kring C^* van de duale matroïd $(M(G))^*$ een minimale snede is van G en omgekeerd. Omdat een kring een minimale afhankelijke verzameling is, is het ook voldoende om aan te tonen dat een afhankelijke verzameling A^* van de duale matroïd $(M(G))^*$ correspondeert met een splitsende verzameling van G. Stel A^* is afhankelijk in $(M(G))^*$, d.w.z. A^* zit in geen enkele basis van $(M(G))^*$. Hieruit volgt dat A^* een niet-lege doorsnede heeft met iedere voorbrengende boom van G, d.w.z. $G-A^*$ bevat geen enkele voortbrengende boom, d.w.z. is niet samenhangend. Hieruit volgt dat A^* een splitsende verzameling is.
Omgekeerd, zij A^* een splitsende verzameling. Dan heeft A^* een niet-lege doorsnede met iedere voortbrengende boom van G: A^* zit in geen enkele basis van $(M(G))^*$. Hieruit volgt dat A^* afhankelijk is in $(M(G))^*$. ■

22.2 GEVOLG:

De cokringen van M(G) zijn de minimale sneden van G, en de co-afhankelijke verzamelingen van M zijn de splitsende verzamelingen van G.

In paragraaf 6 bewezen we dat voor G een vlak-getekende graaf met G^* geometrisch-duale graaf geldt: een verzameling van takken in G is een enkelvoudige kring d.e.s.d. als de duale verzameling takken in G^* een minimale snede vormen.
Eveneens in paragraaf 6 definiëerden we een abstract-duale graaf $G^{\otimes}$ van G door te eisen dat er een één-één-correspondentie moet zijn tussen de takken van G en $G^{\otimes}$ zdd. een verzameling van takken in G een enkelvoudige kring is d.e.s.d. als de corresponderende verzameling van takken in $G^{\otimes}$ een minimale snede is.
Dit impliceert dat de kringen van de matroïd M(G) overeenkomen met de kringen van de matroïd $M^*(G^{\otimes})$. Door deze uitspraak te dualiseren en door op te merken dat een geometrisch-duale tevens een abstract duale is, krijgen we het volgende resultaat.

22.3 STELLING.

(i) Indien $G^{\otimes}$ een abstract-duale graaf van G is, dan geldt dat $M(G^{\otimes})$ isomorf is met $M^{*}(G)$;

(ii) Indien G^{*} de geometrisch-duale van een vlak-getekende graaf G is, dan geldt dat $M(G^{*})$ isomorf is met $M^{*}(G)$.

<u>22.4 Definitie</u>. Een matroïd die zowel een graaf-matroïd is als een cograaf-matroïd heet een <u>vlakke matroid</u>.

Een vlakke graaf kan verschillende niet-isomorfe duale grafen hebben zoals we zagen in paragraaf 6. Een matroïd M heeft slechts één duale matroïd, nl. M^{*}.

22.5 STELLING

Indien $G_1^{\otimes}$ en $G_2^{\otimes}$ beide abstract-duale grafen zijn van G, dan zijn $M(G_1^{\otimes})$, $M(G_2^{\otimes})$ en $M^{*}(G)$ isomorf.

BEWIJS:

Uit stelling 22.3 (i) volgt dat zowel $M(G_1^{\otimes})$ als $M(G_2^{\otimes})$ isomorf zijn met $M^{*}(G)$. De drie matroïden zijn dus isomorf. ■

Volgens stelling 6.16 is een graaf vlak d.e.s.d. als de graaf een abstract-duale graaf heeft. Wat betekent dit voor de corresponderende matroïden. Veronderstel dat $G^{\otimes}$ een abstract-duale is van G. Dan is $M(G^{\otimes})$ een graaf matroïd. Omdat $M(G^{\otimes}) \cong M^{*}(G)$, zien we dat $M(G^{\otimes})$ ook een cograaf matroïd is. Dus is $M(G^{\otimes})$ een vlakke matroïd. Door de rollen van G en $G^{\otimes}$ te verwisselen vinden we dat ook geldt dat M(G) een vlakke matroïd is, indien G een vlakke graaf is.

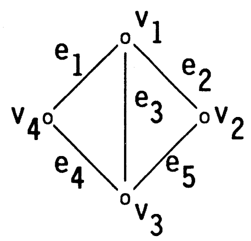
Zonder bewijs vermelden we dat ook omgekeerd geldt dat G een vlakke graaf is, indien M(G) een vlakke matroïd is. Hieruit volgt:

22.6 STELLING

G is een vlakke graaf d.e.s.d. als M(G) een vlakke matroïd is.

Opgave 1

a. Schrijf de bases en de kringen op van de graafmatroïd van de hieronder getekende graaf G



b. Is deze matroïd een binaire matroïd? Verklaar uw antwoord.

c. Is deze matroïd een transversaal matroïd? Verklaar uw antwoord.

Opgave 2

Toon met behulp van stelling 22.6 aan dat de volledige bipartiete graaf $K_{3,3}$ niet vlak is.

Opgave 3

Toon aan dat de bij de volledige graaf K_5 behorende matroïd $M(K_5)$ geen vlakke matroïd is.

23 Het gretige algorithme

Veronderstel dat aan de elementen $e \in E$ van de matroïd $M = (E,\mathcal{I})$ niet-negatieve getallen $w(e)$, gewichten geheten, zijn toegekend.
In de combinatorische programmering komen we problemen tegen die in matroïden taal luiden: "Bepaal een onafhankelijke verzameling waarvoor de som van de gewichten maximaal is".

Voor onafhankelijke verzamelingen $I_1 = \{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ en $I_2 = \{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ nemen we aan dat de elementen gesorteerd zijn naar afnemend gewicht, d.w.z. $w(a_1) \geq w(a_2) \geq \cdots \geq w(a_m)$ en $w(b_1) \geq w(b_2) \geq \cdots \geq w(b_n)$.

De gewichtsfunctie w induceert een lexicografische ordening van de onafhankelijke verzameling: we zeggen dat I_1 lexicografisch groter is dan I_2 als er een k is zdd. $w(a_i) = w(b_i)$ voor $1 \leq i \leq k-1$ en $w(a_k) > w(b_k)$, of indien geldt $w(a_i) = w(b_i)$ voor $1 \leq i \leq n$ en $m > n$.
Een verzameling die niet lexicografisch kleiner is dan enige andere verzameling noemen we lexicografisch maximaal. Het is duidelijk dat een lexicografische maximale verzameling een basis moet zijn, en dat er precies één basis is die lexicografisch maximaal is indien alle gewichten verschillend zijn.

Een verzameling $B = \{b_1,b_2,\dots,b_n\} \in \mathcal{I}$ heet Gale optimaal in $\mathcal{I}$ als voor iedere $I = \{a_1,a_2,\dots,a_m\} \in \mathcal{I}$ geldt $n \geq m$ en $w(b_i) \geq w(a_i)$ voor $1 \leq i \leq m$.
Merk op dat door deze definitie alleen een basis Gale optimaal kan zijn. We nemen steeds aan dat de elementen in een verzameling genummerd zijn naar niet-stijgende gewichten.

23.1 STELLING
De volgende uitspraken zijn equivalent:
(i) B is lexicografisch maximaal in $\mathcal{I}$;
(ii) B is Gale optimaal in $\mathcal{I}$;
(iii) B heeft een maximaal gewicht in $\mathcal{I}$.
BEWIJS:
(i) $\rightarrow$ (ii): Zij $B = \{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ een lexicografisch maximale basis.
Veronderstel dat B niet Gale optimaal is. Dan bestaat er een onafhankelijke verzameling $I = \{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ zdd. $w(a_i) \leq w(b_i)$ voor $1 \leq i \leq k-1$, en $w(a_k) > w(b_k)$.

Beschouw de onafhankelijke verzamelingen $B_{k-1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$ en $I = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Uit de eigenschappen van onafhankelijke verzamelingen volgt dat er een $a_j \in I$ is zdd. $B_{k-1} \cup \{a_j\} \in \mathcal{I}$. Nu is echter $B_{k-1} \cup \{a_j\}$ lexicografisch groter dan B, omdat $w(a_j) \geq w(a_k) > w(b_k)$.

(ii) $\rightarrow$ (iii): Zij $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ een Gale optimale basis en neem een willekeurige $I = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \in \mathcal{I}$. Omdat $w(b_i) \geq w(a_i)$ $1 \leq i \leq m$, is het gewicht van B niet kleiner van I.

(iii) $\rightarrow$ (i): Zij $B = \{b_1, b_2 \dots, b_n\}$ een onafhankelijke verzameling met maximaal gewicht, en laat $B^1 = \{b_1^1, b_2^1, \dots, b_n^1\}$ een lexicografisch maximale basis zijn. Dus $w(b_i^1) \geq w(b_i)$, $1 \leq i \leq n$ en $\Sigma_{i=1}^n\ w(b_i) \geq \Sigma_{i=1}^n\ w(b_i^1)$. Hieruit volgt: $w(b_i) = w(b_i^1)$ voor alle i, d.w.z. B is lexicografisch maximaal. ■

Een lexicografisch optimale basis (die dus zowel Gale optimaal is als een verzameling van maxiamaal totaal gewicht is) kan worden gevonden door het gretige algorithme voor matroïden toe te passen.
Dit algorithme luidt: "kies de elementen van een matroïd in volgorde van afnemend gewicht, waarbij een element wordt verwijderd indien door toevoeging de onafhankelijkheid verloren gaat". Formeler luidt het:

23.2 Het gretige algorithme

stap 1: Start met: $B = \emptyset$; $i = 1$; $w = 0$.
stap 2: Als $B \cup \{e_i\} \in \mathcal{I}$: $B := B \cup \{e_i\}$ en $w := w + w(e_i)$.
stap 3: Als $i = |E|$: stop;
Anders: $i = i+1$ en ga naar stap 2.

Met deze eigenschap dat het gretige algorithme een verzameling oplevert met maximaal totaal gewicht kan ook een matroïd worden gedefiniëerd. Dit wordt in de volgende stelling aangetoond.

23.3 STELLING

Zij $\mathcal{I}$ een collectie deelverzamelingen van E met de eigenschappen:
(i) iedere deelverzameling van een verzameling uit $\mathcal{I}$ is een element van $\mathcal{I}$;
(ii) voor iedere niet-negatieve gewichtsfunctie geldt dat een lexicografisch maximale verzameling een maximaal totaal gewicht heeft.
Dan geldt dat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïd is.

BEWIJS:
Laten we veronderstellen dat $M = (E,\mathcal{I})$ geen matroïd is. Dan zijn er dus $I,J \in \mathcal{I}$ met $|I| = k$ en $|J| = k+1$, terwijl voor iedere $e \in J\backslash I$ geldt dat $I \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$. Definiëer nu de gewichtsfunctie w door

$$w(e) = \begin{cases} 1+\varepsilon & \text{als } e \in I \\ 1 & \text{als } e \in J\backslash I \\ 0 & \text{als } e \in E\backslash(I \cup J) \end{cases} \quad \text{met } \varepsilon \text{ z.d.d. } k\cdot\varepsilon < 1.$$

Zij $\hat{I} \in \mathcal{I}$ zdd. $I \subset \hat{I}$ en voor iedere $e \in E\backslash\hat{I}$ geldt $\hat{I} \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$: $\hat{I}$ is dus een maximale verzameling in $\mathcal{I}$ die I bevat. Het is duidelijk dat $\hat{I}$ lexicografisch maximaal is, dus ook een verzameling van maximaal totaal gewicht. Echter,

$$\sum_{e\in J} w(e) \geq k+1 > k(1+\varepsilon) = \sum_{e\in I} w(e) = \sum_{e\in\hat{I}} w(e),$$

wat tot een tegenspraak leidt. ■

We zullen twee toepassingen van het gretige algoritme bespreken.

23.4 Voortbrengende boom met maximale totale lengte

Zij $G = (V,E)$ een samenhangende graaf. Aan iedere tak e is een niet-negatief gewicht w(e) toegekend; w(e) noemen we de lengte van tak e.
We zoeken een voortbrengende boom voor de graaf met maximaal totaal gewicht. Problemen van dit type spelen een belangrijke rol bij het bepalen van de lokatie van verbindingen in wegen of communicatienetwerken.
Beschouwen we de kring matroïd M(G) met gewichtsfunctie w dan wordt het probleem het vinden van een lexicografisch maximale basis.
Het gretige algorithme luid in woorden: "kies de takken één voor één in volgorde van afnemende lengte, voeg een tak niet aan de gekozen takken toe indien daardoor een kring ontstaat".
Indien aldus een voortbrengende boom is verkregen (d.w.z. $|V|-1$ takken zijn uitgekozen), dan stopt het algorithme. Dit algorithme is afkomstig van Kruskal.

23.5 Een volgorde probleem.

Een aantal jobs moeten worden uitgevoerd door één machine. Alle jobs vragen dezelfde hoeveelheid tijd, we nemen aan dat dit één uur is. Indien job e_j niet op tijdstip d_j klaar is, dan moet een boete w_j betaald worden.
In welke volgorde moeten de jobs uitgevoerd worden teneinde de totale boetekosten zo klein mogelijk te moeten zijn?

Zij E de verzameling jobs en $S_i = \{e_j \in E \mid d_j \geq i\}$, dus S_i is de verzameling jobs die niet vóór tijdstip i klaar hoeven te zijn. Stel $S_1, S_2, \ldots, S_m$ zijn niet leeg en beschouw de bijbehorende transversaal matroïd.

Zeg $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ is een onafhankelijke verzameling, dan zijn er $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ zdd $e_j \in S_{i_j}$, $1 \leq j \leq k$. Zonder beperking van de algemeenheid algemeenheid mogen we aannemen dat $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, d.w.z. $i_j \geq j$ voor $1 \leq j \leq k$: het achtereenvolgend uitvoeren van de jobs $e_1, e_2, \ldots, e_k$ doet ze alle k op tijd klaar zijn.

Omgekeerd, dan geldt: $e_1 \in S_1$, $e_2 \in S_2, \ldots, e_k \in S_k$, dus $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ is een partiële transversaal en dus onafhankelijk.

Een onafhankelijke verzameling I met maximaal totaal gewicht heeft minimale totale boete, want de boete is $\sum\limits_{i \notin I} w(e)$. We zoeken dus een lexicografisch maximale basis en het gretig algorithme toegepast op de transversaal matroïd geeft een optimale volgorde.

<u>Voorbeeld</u>

j	1	2	3	4	5	6
d_j	1	1	3	2	3	6
w_j	10	9	7	6	4	2

Het gretige algorithme kiest eerst job 1, job 2 kan dan niet meer gekozen worden. Vervolgens wordt job 3 gekozen. Ook de jobs {1,3,4} zijn onafhankelijk, want ze kunnen in de volgorde (1,4,3) op tijd worden uitgevoerd. Job 5 kan niet worden gekozen, maar job 6 weer wel. Een optimale volgorde is dus (1,4,3,6) met minimale boete van 13.

Opgave 1

Beschouw de vectoren

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

met de gewichten $w(x^1) = 10$, $w(x^2) = 8$, $w(x^3) = 8$, $w(x^4) = 4$, $w(x^5) = 1$.
Bepaal een onafhankelijk stel vectoren met maximaal gewicht.

Opgave 2

Beschouw 6 jobs die moeten worden uitgevoerd op één machine. Alle jobs vragen één uur tijd. De machine start om 8.00 uur. Hieronder staan de deadlines en de boeten bij overschrijding van de deadline.

job	1	2	3	4	5	6
deadline	12.00	9.00	10.00	11.00	13.00	10.00
boete	ƒ 3,-	ƒ 6,-	ƒ 9,-	ƒ 8,-	ƒ 7,-	ƒ 5,-

Gevraagd: volgorde van de jobs zodat de boetekosten minimaal zijn.

Opgave 3

Beschouw de volledige graaf K_6 met knooppuntenverzameling $\{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ en takkenverzameling E. Aan de takken $(v_i \in v_j)$ worden gewichten w_{ij} toegekent, en wel als volgt:

$w_{12} = 3$; $w_{13} = 4$; $w_{14} = 3$; $w_{15} = 4$; $w_{16} = 3$; $w_{23} = 2$; $w_{24} = 6$; $w_{25} = 3$;
$w_{26} = 1$; $w_{34} = 0$; $w_{35} = 4$; $w_{36} = 1$; $w_{45} = 3$; $w_{46} = 2$; $w_{56} = 0$;

Construeer met het gretige algorithme een voortbrengende boom met maximaal gewicht.

Opgave 4

Bewijs dat een voortbrengende boom met maximale lengte ook als volgt kan worden geconstrueerd: "verwijder steeds de kortste tak maar zorg ervoor dat de graaf samenhangend blijft".